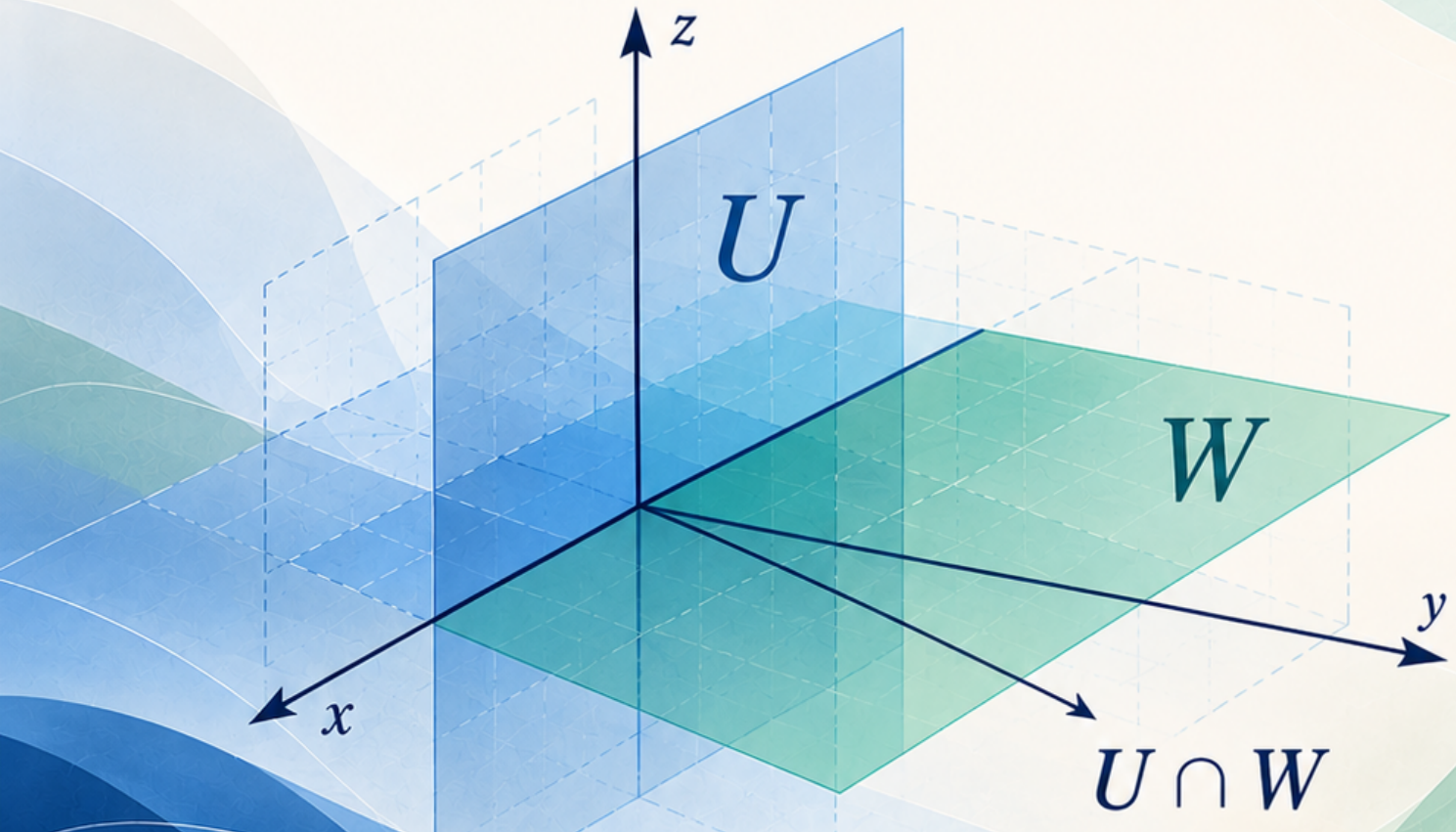
ÁLGEBRA LINEAL

$$0 \in U$$
$$u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$$
$$\lambda \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$$

Subespacios vectoriales



Subespacios vectoriales

Subespacios vectoriales. Definición y ejemplos.

Definición (Subespacio vectorial)

Sea V un K-e.v. y $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Decimos que U es **subespacio vectorial** de V, si U también es un K-e.v.

Proposición (caracterización de subespacios)

Sea V un K-e.v. y $U \subseteq V$ un subconjunto. U es subespacio de V si, y solo si, se cumple:

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

(iii) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$

Para comprobar que U es subespacio de V, solo hay que ver que se cumplen (i), (ii) y (iii).

DEM

$\Rightarrow$ Sup. que U es un subespacio de V.

(i) Se cumple porque en la def. de subespacio, se pide que $U \neq \emptyset$

(ii) y (iii) se cumplen porque la suma es interna y el producto por escalares, externo. ✓

$\Leftarrow$ Sup. que se cumplen (i)-(iii) y tenemos que ver que U es subespacio, esto es, que es un K-e.v.

(i) nos asegura que $U \neq \emptyset$

(ii) nos dice que la suma es interna (SV1)

(iii), que el producto por escalares es externo (PVS)

El resto de las propiedades, como $U \subseteq V$ y los elementos de V las cumplen, los de U también. ✓ ■

Ejemplo. Decidir si los siguientes subconjuntos son subespacios:

(a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^3$

(i) $U \neq \emptyset$ porque $(0,0,0) \in U$ ✓

(ii) Tomamos $u_1, u_2 \in U$, esto es,

$u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ con $x_1+y_1+z_1=0$

$u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con $x_2+y_2+z_2=0$

Veamos si $u_1+u_2 \in U$

$$u_1+u_2 = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (\overbrace{x_1+x_2}^{X}, \overbrace{y_1+y_2}^{Y}, \overbrace{z_1+z_2}^{Z})$$

Para que $u_1+u_2 \in U$, debe cumplirse que $X+Y+Z=0$. ¿Se cumple?

$$X+Y+Z = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)$$

Quitamos paréntesis y reordenamos $= (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 0 \Rightarrow u_1+u_2 \in U$ ✓

(0 y 0)

(iii) Tomamos $u \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$u = (x,y,z)$ con $x+y+z=0$

Veamos si $\lambda u \in U$:

$$\lambda u = \lambda \cdot (x,y,z) = (\overbrace{\lambda x}^{X}, \overbrace{\lambda y}^{Y}, \overbrace{\lambda z}^{Z})$$

Comprobamos si cumple la condición de U:

$$X+Y+Z = \lambda x+\lambda y+\lambda z = \lambda\cdot(x+y+z) = 0 \Rightarrow \lambda u \in U$$ ✓

(0)

Concluimos que U es subespacio de $\mathbb{R}^3$

(b) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y=0,\ 2z-t=8\}$ Cuando aparecen números sueltos $\neq 0$... malo

Una de las propiedades de que U sea subespacio es que el vector cero (el neutro para la suma de vectores) esté en el conjunto, pero en este caso,

$(0,0,0,0) \notin U$ porque no cumple $2\cdot 0 - 0 = 8$

U no es subespacio de $\mathbb{R}^4$.



(c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ como subesp. de $\mathbb{R}^3$.

Si U fuera un subesp, para $u_1, u_2 \in U$, se debe de cumplir que $u_1 + u_2 \in U$.

Cuando aparecen términos de grado mayor que 1... malo.

En este caso $(0,0,0) \in U$ porque cumple la condición

Sin embargo, si tomamos

$u_1 = (1,0,0)$, que $u_1 \in U$ porque $1 \cdot 0 = 0$

$u_2 = (0,1,0)$, que $u_2 \in U$ porque $0 \cdot 1 = 0$

tenemos que $u_1 + u_2 = (1,1,0)$ y $1 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \notin U$

U no es un subespacio vectorial

Las relaciones que definen un subespacio deben de ser lineales (de grado 1)

Subespacios vectoriales. Ejemplos.

Ejemplo. Decidir si los siguientes subconjuntos son subespacios:

(a) $U = \{(3\alpha, \alpha, \alpha+\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^4$

"Parámetros"

(i) $U \neq \emptyset$ porque, por ej, para $\alpha = \beta = 0 \rightarrow (0,0,0,0) \in U$ ✓

(ii) Tomamos $u_1, u_2 \in U$,

$u_1 = (3\alpha, \alpha, \alpha+\beta, \beta)$ $\quad$ $u_2 = (3\alpha', \alpha', \alpha'+\beta', \beta')$

$u_1 + u_2 = (3\alpha + 3\alpha', \alpha+\alpha', \alpha+\beta+\alpha'+\beta', \beta+\beta')$

$= (3(\alpha+\alpha'), \alpha+\alpha', (\alpha+\alpha')+(\beta+\beta'), \beta+\beta')$

$A = \alpha+\alpha'$, $B = \beta+\beta'$

$= (3A, A, A+B, B)$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$u_1 + u_2 \in U$ ✓

(iii) Tomamos $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, con $u = (3\alpha, \alpha, \alpha+\beta, \beta)$

$$\lambda u = \lambda \cdot (3\alpha, \alpha, \alpha+\beta, \beta) = (3\lambda\alpha, \lambda\alpha, \lambda\alpha+\lambda\beta, \lambda\beta)$$

$A = \lambda\alpha$, $B = \lambda\beta$ $= (3A, A, A+B, B)$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$$\lambda u \in U \checkmark$$

Concluimos que U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) $W = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = f(1) \}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ función} \}$

(i) $W \neq \emptyset$ porque $f(x) = 5$ cumple $f(0) = 5 = f(1) \Rightarrow f \in W$ ✓

(ii) Sean $f, g \in W$, esto es, funciones con $f(0) = f(1)$ y $g(0) = g(1)$.

$$(f+g)(0) \overset{\text{Def}}{=} f(0) + g(0) = f(1) + g(1) \overset{\text{Def}}{=} (f+g)(1)$$

$$f + g \in W \checkmark$$

(iii) Sea $f \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(0) \overset{\text{Def}}{=} \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot f(1) = (\lambda f)(1)$$

$$\lambda f \in W \checkmark$$

W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) $M_1 = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{rang} A = 1 \}$ en $M_2(\mathbb{R})$

M_1 no es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ porque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_1$$

ya que su rango es 0. ¡El neutro siempre debe de estar en el subespacio!

(d) $M_2 = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) : AM = MA \}$ en $M_2(\mathbb{R})$, donde M es una matriz fija de $M_2(\mathbb{R})$.

M_2 es el subconj. de $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices que conmutan con la matriz fija M.

(i) $M_2 \neq \emptyset$ porque $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2$, ya que, $MI_2 = M = I_2 M$. ✓

(ii) Tomamos $A, A' \in M_2$, esto es, $AM = MA$ y $A'M = MA'$.

$$(A+A')\cdot M = AM + A'M = MA + MA' = M(A+A')$$

$A+A'$ conmutan con M $\quad A+A' \in M_2$ ✓

(iii) Tomamos $A \in M_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $AM = MA$.

$$(\lambda A)\cdot M = \lambda \cdot AM = \lambda MA = M\cdot(\lambda A)$$

Un nº sí conmuta con una matriz

$\lambda M = M \cdot \lambda$

λA conmuta con M

$\lambda A \in M_2$ ✓

M_2 es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(e) $M_3 = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,.\, A = A^t \}$ en $M_n(\mathbb{R})$

M_3 son las matrices de $M_n(\mathbb{R})$ <u>simétricas</u>. Recordemos dos propiedades de trasponer matrices:

(I) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad (A+B)^t = A^t + B^t$

(II) $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$

Demostremos que M_3 es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$:

(i) $M_3 \neq \emptyset$ porque la matriz identidad $I_n = I_n^t \Rightarrow I_n \in M_3$ ✓

(ii) Tomamos $A, B \in M_3$, esto es, $A = A^t$ y $B = B^t$

$$(A+B)^t \overset{(II)}{=} A^t + B^t = A + B \Rightarrow A+B \in M_3 \quad ✓$$

(iii) Tomamos $A \in M_3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $A = A^t$

$$(\lambda A)^t \overset{(I)}{=} \lambda A^t = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in M_3 \quad ✓$$

M_3 es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$

(f) $M_4 = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : tr(A) = 1 \}$ en $M_n(\mathbb{R})$, donde $tr(A)$ significa traza de A y es la suma de los elementos de la diagonal de A.

M_4 no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$ porque la matriz nula

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

tiene $tr(O_n) = 0 \neq 1 \Rightarrow O_n \notin M_4$.

(g) $P_1 = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : (x-1) \text{ divide a } p(x) \}$

$\mathbb{R}_3[x]$: $\mathbb{R}$-e.v. de los polinomios de grado ≤ 3

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

$(x-1)$ divide a $p(x)$: $p(x)$ es múltiplo de $(x-1)$, $p(x) = (x-1) \cdot q(x)$

(i) $P_1 \neq \emptyset$ porque $p(x) = 0 = 0 \cdot (x-1)$ ✓

(ii) Tomamos $p_1(x), p_2(x) \in P_1$, esto es,

$p_1(x) = (x-1) \cdot q_1(x)$; $p_2(x) = (x-1) \cdot q_2(x)$

para ciertos $q_1(x), q_2(x)$.

$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = (x-1) q_1(x) + (x-1) q_2(x)$$
$$= (x-1)[q_1(x) + q_2(x)]$$

$\Rightarrow p_1(x) + p_2(x) \in P_1$ ✓

(iii) Tomamos $p(x) \in P_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda p(x) = \lambda \cdot (x-1) q(x) = (x-1)[\lambda q(x)] \Rightarrow \lambda p(x) \in P_1 \checkmark$$

P_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$

(h) $P_2 = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0 \}$

(i) $P_2 \neq \emptyset$ porque para $p(x) = x - 1$, $p(1) = 0$ ✓

(ii) Tomamos $p_1(x), p_2(x) \in P_2$, esto es, $p_1(1) = 0 = p_2(1)$

$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 \Rightarrow (p_1 + p_2)(x) \in P_2$ ✓

(iii) Tomamos $p(x) \in P_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ ($p(1) = 0$)

$(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = 0 \Rightarrow (\lambda p)(x) \in P_2$ ✓

P_2 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$

Ecuaciones de un subespacio vectorial

Un subespacio vectorial viene definido por <u>ecuaciones lineales</u> (polinomios de grado 1) y hay dos tipos.

Resolver el sistema

ECUACIONES IMPLÍCITAS ⇄ **ECUACIONES PARAMÉTRICAS**

Gauss e imponer que sea compatible.

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ -x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

¡Siempre son ceros!

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda \\ t = \lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in K$$

Cuerpo del espacio vect.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W: \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda \\ t = \lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Idea: Si tomamos $(x,y,z,t) \in W$, deben existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que hagan que el sistema anterior se cumpla, es decir, que sea **compatible**.

$$(x,y,z,t) = (5, 0, -1, 2) \rightsquigarrow \lambda = 1,\ \mu = 1$$

Si resolvemos el sistema como si conociéramos (x,y,z,t) y las incógnitas fueran λ, μ, imponiendo que sea compatible, tendremos condiciones:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \xrightarrow{\text{Forma matricial}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 = -f_1]{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 3 & x \\ 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

Términos indep, porque los estamos tomando fijos

$$\begin{matrix} f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - 2f_1 \\ f_4 = f_4 - f_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y - z \\ 0 & 3 & x - 2z \\ 0 & 1 & t - z \end{array}\right) \xrightarrow[f_4 = f_4 + f_2]{f_3 = f_3 + 3f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y - z \\ 0 & 0 & x + 3y - 5z \\ 0 & 0 & y - 2z + t \end{array}\right)$$

Como el sist. tiene que ser compatible, debe darse, por el T. de Rouché-Fröbenius, que

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^+$$

Para que esto ocurra, todo lo que queda bajo la línea debe de ser 0.

$$W: \begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones implícitas de W

Ejemplo. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$U: \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

Si tomamos $(x,y,z,t) \in U$, debe cumplir las ecuaciones, por lo que será solución del sistema. Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 = f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Pasamos a forma algebraica.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \longrightarrow x = -y + 3z \\ -2y + 3z + t = 0 \longrightarrow t = 2y - 3z \end{cases}$$

Llamando $y = \lambda$ y $z = \mu$,

$$U: \begin{cases} x = -\lambda + 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = 2\lambda - 3\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas

Generadores y bases de un subespacio vectorial

Def (Subespacio generado por un conjunto de vectores)

Sea V un K-e.v y sea $S = \{v_1, _, v_m\}$ un subconjunto no vacío de V. Decimos que U es el subespacio generado por S y escribimos

$$U = \langle S \rangle \quad o \quad U = \text{span}(S) \quad o \quad U = \langle v_1, _, v_m \rangle,$$

si U es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S

Si U' es otro subespacio que contiene a S, entonces $U \subseteq U'$.

Prop.

Sea V un K-e.v y $S = \{v_1, _, v_m\}$. Entonces

$$\langle S \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + _ + \lambda_m v_m : \lambda_i \in K,\ i = 1, _, m \}$$

Conjunto de todas las posibles combinaciones lineals de $v_1, _, v_m$.

DEM

Llamemos $U = \{ \lambda_1 v_1 + _ + \lambda_m v_m : \lambda_i \in K,\ i = 1, _, m \}$. Tenemos que ver que es $\langle S \rangle$, es decir, el menor subespacio que contiene a $v_1, _, v_m$.

(1) $v_1, _, v_m \in U$ ✓

Tomamos $\lambda_j = \begin{cases} 0, \text{ si } j \neq i \\ 1, \text{ si } j = i. \end{cases}$

$v_i = 0 \cdot v_1 + _ + 1 \cdot v_i + _ + 0 \cdot v_m$ para cada $i = 1, _, m$

(2) U es subespacio de V ✓

(i) $U \neq \emptyset$ porque $S \neq \emptyset$ y $S \subseteq U$

(ii) Tomamos dos elementos de U:

$u_1 = \lambda_1 v_1 + _ + \lambda_m v_m \qquad u_2 = \mu_1 v_1 + _ + \mu_m v_m$

$u_1 + u_2 = \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}_{\alpha_1} v_1 + _ + \underbrace{(\lambda_m + \mu_m)}_{\alpha_m} v_m \in U$

(iii) Tomamos $u \in U$ y $\lambda \in K$,

$u = \lambda_1 v_1 + _ + \lambda_m v_m$

$\lambda u = \lambda (\lambda_1 v_1 + _ + \lambda_m v_m) = \underbrace{(\lambda \lambda_1)}_{\alpha_1} v_1 + _ + \underbrace{(\lambda \lambda_m)}_{\alpha_m} v_m \in U$

(3) U es el menor subespacio que contiene a $S = \{v_1, _, v_m\}$ ✓

Sup. que U' es otro subespacio de V que contiene a S. Si contiene a S, contiene a $v_1, _, v_m$ y a cualquier comb. lin suya.

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U'$

$\uparrow U$

$\Rightarrow$ Todos los elementos de U están en $U' \Rightarrow U \subseteq U'$ ■

¿Cómo obtener una base de un subespacio?

Si tenemos un conjunto de generadores

$$S = \{v_1, \dots, v_m\}$$

basta eliminar los que son lin. dependientes.

Así, no solo obtenemos una base, sino también la dimensión.

Ej: Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,-2,-1,3), (0,2,1,-1), (-2,6,3,-7) \rangle$$

U está generado por tres vectores, pero podemos eliminar los dependientes usando Gauss:

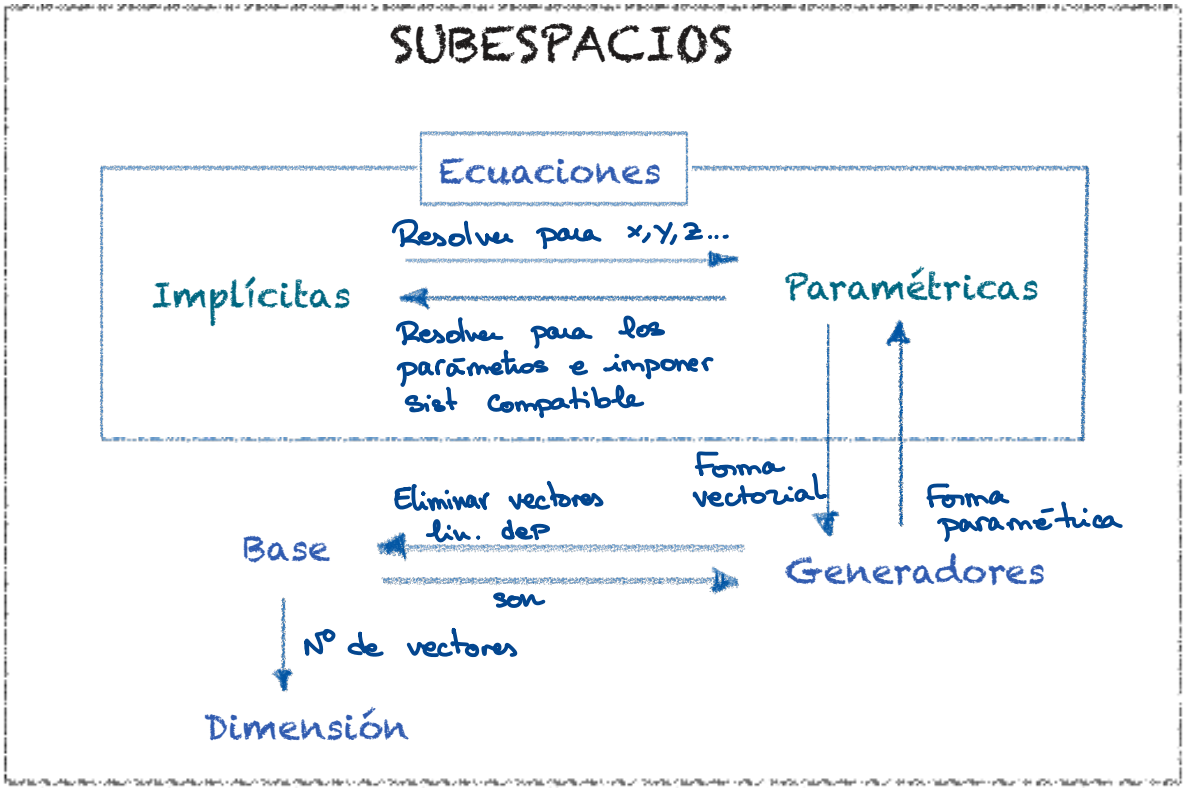
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generan lo mismo los tres que solo los dos primeros

Así, tenemos una base de U y su dimensión:

$$B_U = \{(1,-2,-1,3), (0,2,1,-1)\}; \quad \dim U = 2$$

Base, dimensión y ecuaciones de subespacios



Ej Hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \langle (1,-2,-1,3), (0,2,1,-1), (-2,6,3,-7) \rangle$$

Generadores de $\mathcal{U}$

Base y dimensión

Eliminamos vectores lin. dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es lin. dep.

$$B_{\mathcal{U}} = \{(1,-2,-1,3), (0,2,1,-1)\} \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{U} = 2$$

Ecuaciones paramétricas

Como $B_{\mathcal{U}}$ es base, todos los elementos de $\mathcal{U}$ son combinación lineal de los de $B_{\mathcal{U}}$: si tomamos $(x,y,z,t) \in \mathcal{U}$,

$$(x,y,z,t) = \lambda \cdot (1,-2,-1,3) + \mu \cdot (0,2,1,-1)$$ ← Forma vectorial

$$\begin{cases} x = 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu \\ y = (-2)\cdot\lambda + 2\cdot\mu \\ z = (-1)\cdot\lambda + 1\cdot\mu \\ t = 3\cdot\lambda + (-1)\cdot\mu \end{cases}$$

$$U: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 2\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 3\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Forma paramétrica

↑ Resolver como si x, y, z, t fueran números y λ, μ las incógnitas

Ecuaciones implícitas

Si elegimos $(x, y, z, t) \in U$, deben de existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla el sistema de las ecuaciones paramétricas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y + 2x \\ 0 & 0 & -y + 2z \\ 0 & 0 & -4x + y + 2t \end{array}\right)$$

Variables

Vectores de la base

Deben de ser cero

Para que sea compatible

$$U: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 4x - y - 2t = 0 \end{cases}$$

Ej: Hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$W: \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

← Ecuaciones implícitas

Ecs. paramétricas

Resolvemos el sistema por el método de Gauss y llegamos a:

$$W: \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\mu \\ y = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

} Forma vectorial

Base y dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base (porque son lin. indep)

$\mathcal{B}_W = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0), (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)\}$ y $\dim W = 2$

Si cambiamos un vector de la base por un múltiplo suyo, sigue siendo base (por el Lema de Intercambio de Steinitz)

$\mathcal{B}'_W = \{(1, 1, 3, 0), (-2, 1, 0, 3)\}$ es otra base de W.

Ej Hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$V: \begin{cases} x = \lambda + \mu + \alpha \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \\ t = \lambda + \alpha \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

$\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$ — 3 parámetros

Base y dimensión

Escribimos las paramétricas en forma vectorial.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generadores (o base)

Como son lin. indep,

$\mathcal{B}_V = \{(1,1,1,1), (1,1,0,0), (1,0,0,1)\}$ y $\dim V = 3$

Ecs implícitas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 1 & -z+t \\ 0 & 0 & 0 & -x+y-z+t \end{array}\right)$$

4 - 1

← Debe ser 0

Imponemos que sea compatible

$$\sqrt{}: \; -x+y-z+t = 0$$

← 1 ecuación en $\mathbb{R}^4$ (dim 4)

Ej Hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \langle (1,-2,-1,3), (0,2,1,-1), (-2,6,3,-7) \rangle$$

Generadores de $\mathcal{U}$

Base y dimensión

Eliminamos vectores lin. dependientes:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es lin. dep.

$$B_{\mathcal{U}} = \{(1,-2,-1,3), (0,2,1,-1)\} \text{ y } \dim \mathcal{U} = 2$$

Ecuaciones paramétricas

Como $B_{\mathcal{U}}$ es base, todos los elementos de $\mathcal{U}$ son combinación lineal de los de $B_{\mathcal{U}}$: si tomamos $(x,y,z,t) \in \mathcal{U}$,

$$(x,y,z,t) = \lambda \cdot (1,-2,-1,3) + \mu \cdot (0,2,1,-1)$$ ← Forma vectorial

$$\begin{cases} x = 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu \\ y = (-2)\cdot\lambda + 2\cdot\mu \\ z = (-1)\cdot\lambda + 1\cdot\mu \\ t = 3\cdot\lambda + (-1)\cdot\mu \end{cases}$$

$$U: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 2\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 3\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Forma paramétrica

↳ Resolver como si x, y, z, t fueran números y λ, μ las incógnitas

Ecuaciones implícitas

Si elegimos $(x, y, z, t) \in U$, deben de existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla el sistema de las ecuaciones paramétricas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y + 2x \\ 0 & 0 & -y + 2z \\ 0 & 0 & -4x + y + 2t \end{array}\right)$$

Variables

Vectores de la base

Deben de ser cero

Para que sea compatible

$$U: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 4x - y - 2t = 0 \end{cases}$$

Subespacio suma y subespacio intersección

Definición (Suma e intersección de subespacios)

Sea V un K-e.v y sean U_1, U_2 subespacios de V. Definimos:

- La suma de U_1 y U_2. Todas las posibles sumas de un vector de U_1 y otro de U_2.

$$U_1 + U_2 = \{ u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \}$$

- La intersección de U_1 y U_2: Vectores que tienen en común U_1 y U_2.

$$U_1 \cap U_2 = \{ v \in V : v \in U_1 \text{ y } v \in U_2 \}$$

Proposición

En términos de la definición anterior,

$$U_1 + U_2 \qquad \text{y} \qquad U_1 \cap U_2$$

son subespacios de V.

DEM

$U_1 + U_2$ (i) $U_1 + U_2 \neq \emptyset$ porque $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$ por ser subespacios $\Rightarrow \exists u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ ✓

(ii) Tomamos $u, u' \in U_1 + U_2$

$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ con $u = u_1 + u_2$

$u' \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists u_1' \in U_1$ y $u_2' \in U_2$ con $u' = u_1' + u_2'$

$$u + u' = u_1 + u_2 + u_1' + u_2' = \underbrace{(u_1 + u_1')}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u_2')}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$ ✓

(iii) Tomamos $u \in U_1 + U_2$, $\lambda \in K$

$$\lambda u = \lambda (u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$ ✓

$U_1 + U_2$ es subespacio de V

$U_1 \cap U_2$

(i) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ porque como U_1 y U_2 son subespacios, sabemos que $0 \in U_1$ y $0 \in U_2 \Rightarrow 0 \in U_1 \cap U_2$ ✓

(ii) Tomamos $u, u' \in U_1 \cap U_2$

Por un lado, $u, u' \in U_1 \Rightarrow u + u' \in U_1$ (U_1 subesp.)

por otro, $u, u' \in U_2 \Rightarrow u + u' \in U_2$ (U_2 subesp.)

$\Rightarrow u + u' \in U_1 \cap U_2$ ✓

(iii) Tomamos $u \in U_1 \cap U_2$ y $\lambda \in K$.

$u \in U_1$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U_1$

$u \in U_2$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda u' \in U_2$

$\Rightarrow \lambda u \in U_1 \cap U_2$ ✓

$U_1 \cap U_2$ es subespacio de V

Ejemplo Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por:

$$U_1: \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 3\lambda \\ w = 4\mu \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \qquad U_2: \begin{cases} x = 3\alpha - 2\beta \\ y = -\alpha - 4\beta \\ z = 2\alpha + 2\beta \\ t = \alpha - 6\beta \\ w = 5\alpha \end{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Hallar base, dimensión y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U_1 + U_2$ y de $U_1 \cap U_2$.

De las ecuaciones paramétricas de U_1 y U_2, podemos obtener directamente:

$$B_{U_1} = \{(1,2,-1,3,0), (2,1,1,0,4)\}$$

$$B_{U_2} = \{(3,-1,2,1,5), (-2,-4,2,-6)\}$$

$U_1 + U_2$ Recordemos la definición:

$$U_1 + U_2 = \{ u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \}$$

Como tenemos bases de U_1 y U_2, los elementos de $U_1 + U_2$ se pueden escribir como:

$$u_1 + u_2 = \lambda(1,2,-1,3,0) + \mu(2,1,1,0,4) + \alpha(3,-1,2,1,5) + \beta(-2,-4,2,-6,0)$$

Generadores de $U_1 + U_2$

Base y dimensión

Eliminamos generadores lin. dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{U_1+U_2} = \{(1,2,-1,3,0), (2,1,1,0,4), (3,-1,2,1,5)\}$$

$$\dim(U_1 + U_2) = 3$$

Ecuaciones paramétricas

$$U_1+U_2:\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ y = 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ z = -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ t = 3\lambda_1 + \lambda_3 \\ w = 4\lambda_2 + 5\lambda_3 \end{cases}, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones implícitas

Resolvemos el sistema anterior como si las incógnitas fueran λ_1, λ_2 y λ_3 e imponemos que sea compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 2 & z \\ 3 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & 5 & w \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -3 & -7 & -2x+y \\ 0 & 0 & -2 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -2x+y+3z+t \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3x-5y-13z+6w}{6} \end{array}\right)$$

Para que sea compatible,

$$U_1+U_2:\begin{cases} -2x+y+3z+t = 0 \\ -3x-5y-13z+6w = 0 \end{cases}$$

De las paramétricas de U_1, podemos hallar las implícitas, resolviendo el sistema para λ, μ:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \\ 0 & 4 & w \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 0 & x-2y+t \\ 0 & 0 & \frac{-8x+4y+3w}{3} \end{array}\right)$$

Imponemos que el sistema sea compatible:

$$U_1:\begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-2y+t = 0 \\ -8x+4y+3w = 0 \end{cases} \qquad U_2:\begin{cases} -3x+5y+7z = 0 \\ -5x-8y+7t = 0 \\ -10x+5y+7w = 0 \end{cases}$$

Haciendo lo mismo con U_2, ↗

$U_1 \cap U_2$ Los elementos de U_1 cumplen las ecuaciones de U_1; y los de U_2, las de U_2. Así, los de $U_1 \cap U_2$, deben cumplir todas:

Ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-2y+t = 0 \\ -8x+4y+3w = 0 \\ -3x+5y+7z = 0 \\ -5x-8y+7t = 0 \\ -10x+5y+7w = 0 \end{cases}$$

Pero aquí vemos que "sobran" ecuaciones. Para eliminar las redundantes, usamos Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 7 & 0 \\ -10 & 5 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasándolo a forma algebraica:

$$\begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -y+z+t = 0 \\ 12z-4t+3w = 0 \\ 3/2\, w = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Simplificamos $w=0$

$$U_1 \cap U_2 \cdot \begin{cases} -x+y+z=0 & \text{(I)} \\ -y+z+t=0 & \text{(II)} \\ 3z-t=0 & \text{(III)} \\ w=0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

Basta resolver el sistema anterior, que ya es escalonado

(III) $\rightarrow$ $t = 3z$

(II) $\rightarrow$ $-y+z+3z=0 \rightarrow 4z = y$

(I) $\rightarrow$ $-x+4z+z=0 \rightarrow 5z = x$

$$U_1 \cap U_2 \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \\ t = 3\lambda \\ w = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Base y dimensión

De las paramétricas,

$$\mathcal{B}_{U_1 \cap U_2} = \{(5,4,1,3,0)\} \quad \text{y} \quad \dim(U_1 \cap U_2) = 1$$

Ejemplo Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$U_1 : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x - 2y + 5t = 0 \end{cases} \qquad U_2 : \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -5x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Halla base, dimensión y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U_1 + U_2$ y de $U_1 \cap U_2$.

$U_1 \cap U_2$ Los vectores de U_1 son los que cumplen sus ecuaciones implícitas y lo mismo pasa con los de U_2. Para que estén en ambos se deben de cumplir todas.

Ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x - 2y + 5t = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ -5x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Pero es posible que "sobren" ecuaciones Para eliminar las redundantes, usamos eliminación gaussiana.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasando a la forma algebraica,

$$U_1 \cap U_2 : \begin{cases} -x + y + z = 0 & \text{(I)} \\ -3y - z + 5t = 0 & \text{(II)} \\ z + t = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

Resolvemos el sistema anterior:

(III) → $z = -t$

(II) → $-3y - (-t) + 5t = 0 \rightarrow -3y + 6t = 0 \rightarrow y = 2t$

(I) → $-x + 2t - t = 0 \rightarrow -x + t = 0 \rightarrow x = t$

$$U_1 \cap U_2 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \\ t = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Base y dimensión

$$B_{U_1 \cap U_2} = \{(1, 2, -1, 1)\} \qquad \dim(U_1 \cap U_2) = 1$$

$U_1 + U_2$ Recordemos la definición:

Si hallamos bases de U_1 y U_2, sabremos escribir esto como comb. lin. de sus elementos.

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Hallemos primero bases de U_1 y U_2, a partir de las ecuaciones implícitas que nos dan.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -3y - z + 5t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x + y - 3y + 5t = 0 \rightarrow -2y + 5t = x \\ -3y + 5t = z \end{cases}$$

$$U_1 : \begin{cases} x = -2\lambda + 5\mu \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda + 5\mu \\ t = \mu \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B_{U_1} = \{(-2, 1, -3, 0), (5, 0, 5, 1)\}$$

$\hookrightarrow u_1 = \lambda(-2, 1, -3, 0) + \mu(5, 0, 5, 1)$

Haciendo lo mismo con U_2 $\rightsquigarrow B_{U_2} = \{(2, 5, 0, 0), (1, 0, -5, 5)\}$

$\hookrightarrow u_2 = \alpha(2, 5, 0, 0) + \beta(1, 0, -5, 5)$

Podemos decir que los generadores de $U_1 + U_2$ son:

$$U_1+U_2 = \langle (-2,1,-3,0), (5,0,5,1), (2,5,0,0), (1,0,-5,5) \rangle$$

Base y dimensión

Para hallar una base, eliminamos generadores que sean lin. dependientes

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{U_1+U_2} = \{(-2,1,3,0), (5,0,5,1), (2,5,0,0)\}$$

$$\dim(U_1+U_2) = 3$$

Ecuaciones paramétricas

A partir de la base, son inmediatas:

$$U_1+U_2: \begin{cases} x = -2\lambda + 5\mu + 2\alpha \\ y = \lambda + 5\alpha \\ z = 3\lambda + 5\mu \\ t = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones implícitas

Resolvemos el sistema anterior tomando como incógnitas los parámetros λ, μ, α:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 2 & x \\ 1 & 0 & 5 & y \\ 3 & 5 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 2 & x \\ 0 & 5 & 12 & x+2y \\ 0 & 0 & 3 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -5x+2y+4z+5t \end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución,

$$U_1+U_2: \; -5x+2y+4z+5t = 0$$

¿Cuándo un subespacio es el espacio entero?

Sea V un K-e.v y U un subespacio de V ¿Qué condiciones debe satisfacer U para que $U = V$?

Proposición

Si V es un K-e.v. de dimensión finita y U es subespacio de V,

$$U = V \iff \dim U = \dim V$$

DEM

$\Rightarrow$ Si $U = V$, claramente $\dim U = \dim V$ ✓

$\Leftarrow$ Como U es subespacio de V, una base de U será un subconjunto lin. indep. de elementos de V. Llamando

$$\dim U = n = \dim V,$$

si $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ es base de U, son n vectores lin. indep. de V y, por tanto, es base de V, de modo que

$$v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in U \Rightarrow \begin{cases} V \subseteq U \\ U \subseteq V \end{cases} \rightarrow U = V \checkmark$$

y como U es subespacio,

Si un subespacio de un espacio de dimensión finita, V, tiene la misma dimensión que V, es que **es todo** V

Esto no ocurre en dimensión infinita. Por ejemplo, si tomamos V como el $\mathbb{R}$-e.v. de todos los polinomios con coeficientes reales,

$$V = \mathbb{R}[x],$$

una base de V es

$$B_V = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \quad \text{y} \quad \dim V = \aleph_0$$

"Aleph-0", el cardinal de $\mathbb{N}$.

Consideramos ahora el subespacio de V:

$$U = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) \text{ es múltiplo de } x \}$$

$p(x) = x \cdot q(x)$

para algún $q(x)$

$\rightarrow$ $p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ que queramos.

Una base de U es:

$B_U = \{ x, x^2, x^3, x^4, \ldots \}$ y $\dim U = \aleph_0$

Así, $\dim V = \dim U$, pero $U \neq V$, porque en U faltan las constantes. $p(x) = 5$ está en V, pero no en U.

La fórmula de Grassmann

Teorema (Fórmula de Grassmann)

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sean $U_1, U_2 \subseteq V$ dos subespacios. Entonces,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2)$$

DEM

Supongamos que

$$B_{U_1 \cap U_2} = \{u_1, \dots, u_p\} \leftarrow \dim (U_1 \cap U_2) = p$$

Como $U_1 \cap U_2$ es un subespacio tanto de U_1 como de U_2, por el Lema de Intercambio de Steinitz, podemos sustituir p vectores de bases de U_1 y U_2 por los $u_1, \dots, u_p$, de modo que tendríamos:

$$B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} \leftarrow \dim U_1 = p+q$$

$$B_{U_2} = \{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\} \leftarrow \dim U_2 = p+r$$

Para probar que

$$\overbrace{\dim U_1}^{p+q} + \overbrace{\dim U_2}^{p+r} = \dim (U_1 + U_2) + \overbrace{\dim (U_1 \cap U_2)}^{p}$$

basta probar que

$$\dim (U_1 + U_2) = p + q + r$$

De hecho, vamos a ver que

$$B_{U_1 + U_2} = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r\}$$

Generadores

Si tomamos $u \in U_1 + U_2$ $\quad U_1 + U_2$ con $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$

$$u = \underbrace{u_1}_{\in U_1} + \underbrace{u_2}_{\in U_2} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q + \lambda_1' u_1 + \dots + \lambda_p' u_p + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$$

$$= (\lambda_1+\lambda_1')u_1 + \cdots + (\lambda_p+\lambda_p')u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q + \\ + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r$$

$B_{U_1+U_2}$ son generadores ✓

Independencia lineal

Usamos la def. de independencia lineal:

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p}_{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i} + \underbrace{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q}_{\sum_{i=1}^{q} \mu_i v_i} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r}_{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i} = 0$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i v_i}_{\in U_1} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i}_{\in U_2}$$

El vector v está en U_1 y en U_2 $\Rightarrow v \in U_1 \cap U_2$

$$v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i$$

comb lin. de los u_i y w_i igualada a 0

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = 0$$

Pero $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_r\} = B_{U_2}$, ¡son independientes!

$$\Rightarrow \beta_i = 0 = \alpha_i$$

Sustituyendo, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i v_i = 0$$

pero $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\} = B_{U_1}$, ¡son independientes!

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 = \mu_i$$

Todos los coeficientes son 0 y se da la independencia.

$\Rightarrow B_{U_1+U_2}$ son lin indeps. ✓

Conclusión

$$\dim(U_1+U_2) = p+q+r = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

y despejando,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$ ✓ ■

Propiedades de la dimensión de subespacios

En esta sección V será un K-e.v. de dimensión finita, m; y U_1, U_2 serán subespacios vectoriales de V.

Proposición

(i) U_1 y U_2 son ambos subespacios de U_1+U_2.

(ii) $U_1 \cap U_2$ es subespacio tanto de U_1 como de U_2.

DEM

Sabemos que si U_1 y U_2 son subespacios, $U_1 \cap U_2$ y U_1+U_2, también lo son. Lo único que hay que comprobar son los contenidos como subconjuntos.

(i) Recordemos que

$$U_1+U_2 = \{u_1+u_2 \cdot u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$$

Hay que ver que $U_1 \subseteq U_1+U_2$. Dado $u_1 \in U_1$, como $0 \in U_2$, tenemos

$$u_1 = \underset{\in U_1}{u_1} + \underset{\in U_2}{0} \in U_1+U_2 \Rightarrow U_1 \subseteq U_1+U_2$$ ✓

Del mismo modo, $U_2 \subseteq U_1+U_2$.

(ii) Basta usar teoría de conjuntos básica:

$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$$ ✓ ■

Corolario (de dimensión finita!)

Dado V un K-e.v. y U_1, U_2 subespacios:

1) $\dim V \geq \dim(U_1+U_2) \geq \max\{\dim U_1, \dim U_2\}$

2) $0 \leq \dim(U_1 \cap U_2) \leq \min\{\dim U_1, \dim U_2\}$

↑ Es trivial.

DEM

1) • Como U_1+U_2 es subespacio de V,

$$\dim V \geq \dim(U_1+U_2) \checkmark$$

• Como U_1 es subespacio de $U_1+U_2 \Rightarrow \dim(U_1+U_2) \geq \dim U_1$

Como U_2 es subespacio de $U_1+U_2 \Rightarrow \dim(U_1+U_2) \geq \dim U_2$

$$\Rightarrow \dim(U_1+U_2) \geq \max\{\dim U_1, \dim U_2\} \checkmark$$

2) Como $U_1 \cap U_2$ es subespacio de $U_1 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim U_1$

Como $U_1 \cap U_2$ es subespacio de $U_2 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim U_2$

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \min\{\dim U_1, \dim U_2\} \checkmark$$

La fórmula de Grassmann - Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. (Dos hiperplanos siempre se cortan)

Sea V un K-e.v. con $\dim V = n$, para n finito, $n \geq 1$.

Un subespacio de V, a saber U, se llama **hiperplano** si

$$\dim U = n-1$$

Demostrar que dos hiperplanos siempre se cortan y la dimensión de la intersección es mayor o igual que $n-2$.

Sean U_1, U_2 dos hiperplanos de V,

$$\dim U_1 = n-1 = \dim U_2$$

Sabemos que $\dim(U_1+U_2) \geq \max\{\dim U_1, \dim U_2\} = n-1$

Utilizando la fórmula de Grassmann,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

- Si $\dim(U_1+U_2) = n \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = n-2$
- Si $\dim(U_1+U_2) = n-1 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = n-1$

En cualquier caso,

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq n-2 \quad \checkmark$$

Ejercicio 2. (Dos subespacios "demasiado grandes" no se pueden cortar solo en el cero)

Sea V un K-e.v con $\dim V = n$, y sean U_1, U_2 subespacios que cumplen:

$$\dim U_1 + \dim U_2 > n.$$

Demostrar que $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$

Utilizamos la fórmula de Grassmann:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

de donde podemos escribir

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \underbrace{\dim U_1 + \dim U_2}_{> n} - \dim(U_1+U_2)$$

Como sabemos que $\dim(U_1+U_2) \leq n = \dim V$, en la expresión anterior restaremos, como mucho, n.

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > n-n > 0$$
$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$$
$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \{0\} \quad \checkmark$$

Suma directa de subespacios

Definición (suma directa)

Sea V un K-e.v. y U_1, U_2 subespacios. Si se dan estas dos condiciones.

(i) $V = U_1 + U_2$ (ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$,

decimos que V es **suma directa** de U_1 y U_2.

Proposición

Sea $\boxed{V = U_1 \oplus U_2}$. Entonces,

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2.$$

DEM

Utilizamos la fórmula de Grassmann:

$$\dim \underbrace{(U_1 + U_2)}_{V} + \boxed{\dim \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\{0\}}} = \dim U_1 + \dim U_2$$

$$\dim \{0\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 \ \checkmark$$

Proposición

Sea $V = U_1 \oplus U_2$ y $v \in V$. Entonces, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ únicos, de forma que

$$v = u_1 + u_2$$

Si tenemos una suma directa, todos los vectores se escriben de forma única como suma de elementos de cada subespacio.

DEM

Como $V = U_1 \oplus U_2$, en particular, $V = U_1 + U_2$, con lo que, por definición del subespacio suma, todo $v \in V$ se escribe como

$$v = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 \in U_1, \; u_2 \in U_2.$$

Falta ver que la forma es única. Supongamos que se puede escribir de dos formas distintas al menos:

$$u_1 + u_2 = v = u_1' + u_2'$$

$$\underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} = \underbrace{u_2' - u_2}_{\in U_2}$$

Llamando $w = u_1 - u_1' \in U_1$, pero también $w = u_2' - u_2 \in U_2$; por lo que $w \in U_1 \cap U_2$. Pero como la suma es directa,

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow w = 0$$

$$u_1 - u_1' = 0 \Rightarrow u_1 = u_1'$$

$$u_2' - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = u_2'$$

¡Contradicción!

Por tanto, los vectores de $V = U_1 \oplus U_2$ se escriben de forma única como

$$v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \; u_2 \in U_2 \quad \blacksquare$$

Corolario.

Si $V = U_1 \oplus U_2$ y B_{U_1}, B_{U_2} son, respectivamente, bases de U_1 y de U_2, entonces una base de V es

$$B_V = B_{U_1} \cup B_{U_2}.$$

DEM

Sean $B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_m\}$; $B_{U_2} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Queremos ver que

$$B_V = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\} \text{ es base de } V.$$

Como $V = U_1 \oplus U_2$, sabemos que dado $v \in V$, existen $w_1 \in U_1$ y $w_2 \in U_2$ con

$$v = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$

Comb. lin. de elem's de $B_{U_1} \cup B_{U_2}$

$\Rightarrow$ B_V son generadores de V ✓

Falta ver que son lin. indeps:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i}_{\in U_1} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j}_{\in U_2}$$

Llamando $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in U_1$, pero también $w = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \in U_2$

$\Rightarrow w \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$ $\Rightarrow w = 0$

($V = U_1 \oplus U_2$)

- $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0$ y $B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_m\}$ lin. indep $\Rightarrow \lambda_i = 0$
- $w = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = 0$ y $B_{U_2} = \{v_1, \dots, v_n\}$ lin indep $\Rightarrow \mu_j = 0$

$\Rightarrow$ B_V son lin indep ✓

Concluimos que $B_V = B_{U_1} \cup B_{U_2}$ es base de V. ∎

Suma directa de subespacios - Sentido geométrico

Ejemplo. Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$U_1 : \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases} \qquad U_2 = \langle (2,-1,3), (1,1,2) \rangle$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ y dar una interpretación geométrica.

Comenzamos estudiando $U_1 + U_2$. Para ello buscamos bases de ambos subespacios.

U_1 Resolviendo el sistema que lo define, llegamos a:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad B_{U_1} = \{(1,2,-1)\}$$

U_2 Los generadores son linealmente independientes, por lo que

$$B_{U_2} = \{(2,-1,3), (1,1,2)\}$$

$U_1 + U_2$ Recordemos que los elementos de $U_1 + U_2$ son de la forma $u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$.

$$U_1 + U_2 = \langle (1,2,-1), (2,-1,3), (1,1,2) \rangle$$

Pero es fácil ver que son lin. independientes, así que,

$$B_{U_1+U_2} = \{(1,2,-1), (2,-1,3), (1,1,2)\}$$

y $\dim (U_1 + U_2) = 3$ ← dim 3

Como $U_1 + U_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que tiene dim. 3,

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$$

Para ver que la suma es directa falta ver que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. usando la fórmula de Grassmann:

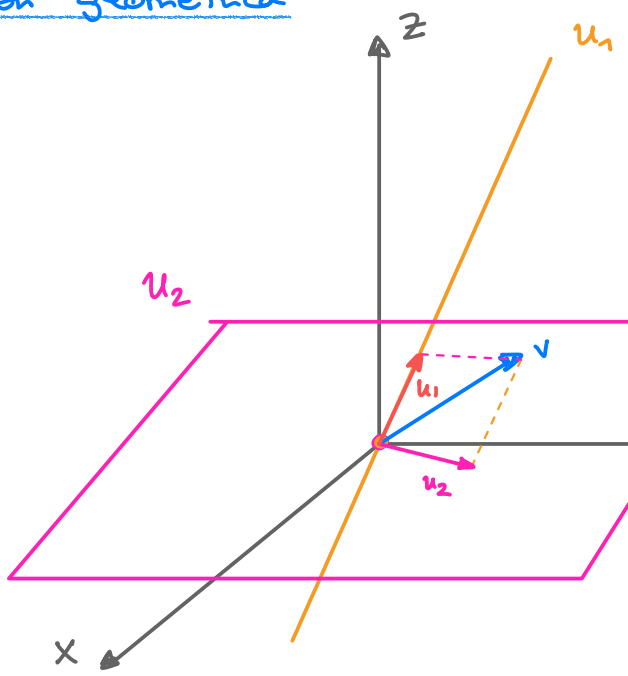
$$\underbrace{\dim U_1}_{1} + \underbrace{\dim U_2}_{2} = \underbrace{\dim (U_1 + U_2)}_{3} + \underbrace{\dim (U_1 \cap U_2)}_{0}$$

y $\dim (U_1 \cap U_2) = 0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Así,

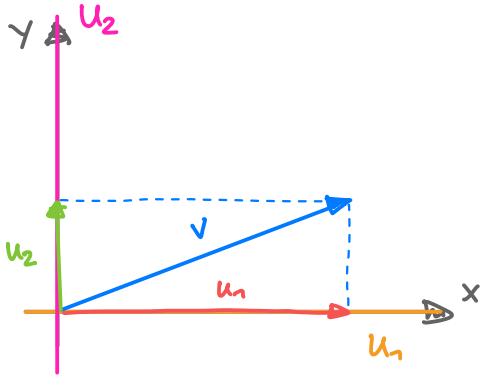
$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \ \checkmark$$

Interpretación geométrica



Que $\mathbb{R}^3$ sea suma directa de U_1 y U_2, quiere decir que cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se escribe de forma única como un vector de U_1 y un vector de U_2

La suma directa permite hacer "descomposición" de vectores en subespacios. Parecido a como hacemos con los ejes cartesianos en $\mathbb{R}^2$:



LA SUMA DIRECTA GENERALIZA ESTA IDEA A CUALQUIER ESPACIO VECTORIAL. ^^

Proyección sobre un subespacio

Sea V un K-eV y sean U_1, U_2 subespacios con

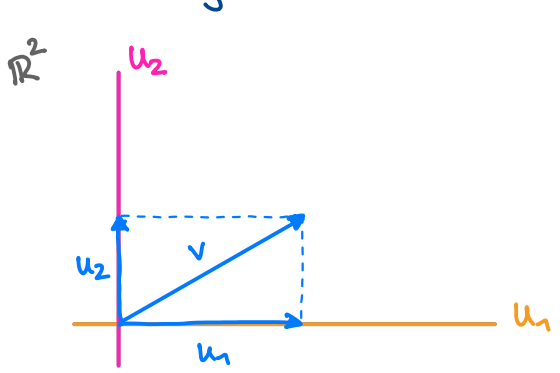
$$V = U_1 \oplus U_2.$$

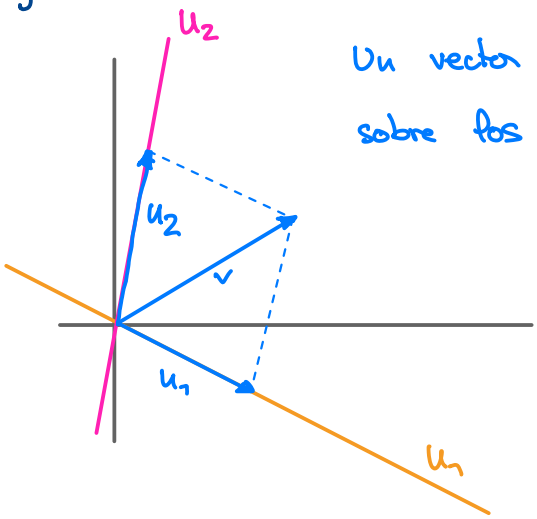
Sabemos que dado $v \in V$, podemos escribir de forma única

$$v = u_1 + u_2, \text{ donde } u_1 \in U_1 \text{ y } u_2 \in U_2.$$

A u_1 lo llamamos **proyección** de v sobre U_1 en la dirección de U_2; y a u_2, **proyección** de v sobre U_2 en la dirección de U_1.

La idea geométrica es la siguiente:





Un vector descompone sobre los subespacios.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios

$$U_1 = \langle (1,0,-1) \rangle \qquad U_2 = \langle (0,1,-1), (-1,1,1) \rangle$$

a) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$

Como vienen dados por generadores,

$$U_1 + U_2 = \langle (1,0,-1), (0,1,-1), (-1,1,1) \rangle$$

Es fácil ver que los tres vectores son linealmente independientes, por lo que

$$\dim (U_1 + U_2) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \checkmark$$

U_1+U_2 es un subesp. de dim 3 dentro de un esp. de dim 3 también

Usando la fórmula de Grassmann:

$$\underbrace{\dim U_1}_{1} + \underbrace{\dim U_2}_{2} = \underbrace{\dim (U_1 + U_2)}_{3} + \underbrace{\dim (U_1 \cap U_2)}_{0}$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\} \checkmark$$

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2}$$

b) Dado $v = (1,1,1)$, hallar su proyección sobre U_2 en la dirección de U_1.

Escribimos

$$(1,1,1) = \overbrace{\lambda_1 (1,0,-1)}^{U_1} + \overbrace{\lambda_2 (0,1,-1) + \lambda_3 (-1,1,1)}^{U_2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3$$

El sumando correspondiente a u_2 es:

$$u_2 = -2 \cdot (0,1,-1) + 3 \cdot (-1,1,1) = (-3,1,5)$$

c) Generaliza el apartado anterior para un vector cualquiera

$$v = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 2x + y + z \\ \lambda_2 = -x - z \\ \lambda_3 = x + y + z \end{array}$$

El sumando correspondiente a u_2 es:

$$u_2(x,y,z) = (-x-z)\cdot(0,1,-1) + (x+y+z)(-1,1,1)$$
$$= (-x-y-z,\ y,\ 2x+y+2z)$$

(*) $$u_2(x,y,z) = (-x-y-z,\ y,\ 2x+y+2z)$$

Esta expresión nos da la proyección sobre u_2 en la dirección de u_1 de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$.

Podemos decir que u_2 es una aplicación

$$u_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow u_2$$

Obs: Esta aplicación la podemos poner como una matriz, simplemente reescribiendo la expresión (*)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y-z \\ y \\ 2x+y+2z \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos da toda la información que necesitamos para calcular la proyección. Por ejemplo, para $v = (1,1,1)$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Subespacio de matrices simétricas - Ejercicio resuelto

Ejercicio. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ consideramos el siguiente subconjunto:

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boxed{A^t = A}\}$$

← Matriz simétrica

a) Demostrar que es un subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ porque la matriz nula, $0 \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Sean $A, B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. ¿$A+B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$?

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B \quad \Rightarrow \quad A+B \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$$

(iii) Sean $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿$\lambda A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$?

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \quad \Rightarrow \quad \lambda A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$$

$\boxed{\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \text{ es subespacio de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

b) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Llamemos $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a la matriz que tiene todo ceros, salvo un 1 en la posición (i,j). Por ejemplo, en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i: 1, 2, 3 — j: 1, 2, 3)

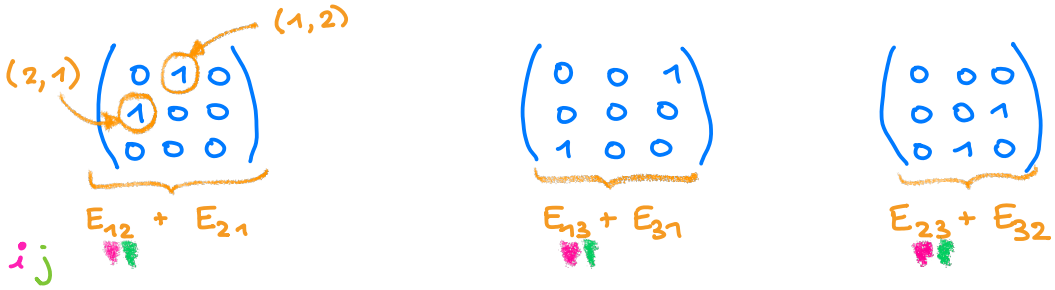
Vamos a escribir una base de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ usando E_{ij}'s. Para fijar ideas, veamos qué ocurre en $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$. Hay dos tipos de matrices simétricas:

- Las que tienen un 1 en la diagonal:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, en $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ serán $E_{11}, \ldots, E_{nn}$.

- Las que tienen 1 fuera de la diagonal:



i va de 1 a $n-1$ $\quad$ j va de $i+1$ a n

En general, en $Sym_n(\mathbb{R})$ tendremos las matrices

$$E_{ij} + E_{ji} \quad \text{para} \quad i = 1, _, n-1 \; ; \; j = i+1, _, n.$$

Afirmamos, de hecho que

$$\mathcal{B}_{Sym_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n} \{E_{ii}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{E_{ij} + E_{ji}\}$$

es una base de $Sym_n(\mathbb{R})$. Vamos a probarlo:

Generadores

Dada $A \in Sym_n(\mathbb{R})$ con entradas a_{ij}, que cumplen que

$a_{ij} = a_{ji}$ si $i \neq j$ ← Esto es, que A es simétrica

podemos escribir

$$A = \sum_{i=n}^{n} a_{ii} \cdot E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) \checkmark$$

Elementos de la diagonal $\quad$ Elem's fuera de la diagonal

Ejemplo en $Sym_3(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 2 \cdot E_{22} + 0 \cdot E_{33} + (-1) \cdot (E_{12} + E_{21}) + 3 (E_{13} + E_{31}) + 5 \cdot (E_{23} + E_{32})$$

Independencia lineal

Si escribimos la matriz nula,

$$0 = \sum_{i=n}^{n} a_{ii} \cdot E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}),$$

necesariamente los $a_{ii} = 0$ y los $a_{ij} = 0$

Afirmamos así que

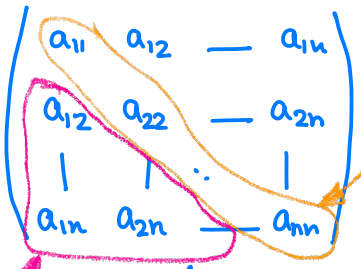
$$\mathcal{B}_{Sym_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n} \{E_{ii}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{E_{ij} + E_{ji}\}$$

es base de $Sym_n(\mathbb{R})$.

Dimensión

¿Cuántos elementos hay en $\mathcal{B}_{Sym_n(\mathbb{R})}$?

- Hay tantas E_{ii} como elementos en la diagonal.



Hay n elementos

- Hay tantos $\{E_{ij} + E_{ji}\}$ como elementos hay bajo la diagonal.

En toda la matriz $\rightarrow n^2$

Quitando la diagonal $\rightarrow n^2 - n$

Hay $\frac{n^2-n}{2}$ elementos

Sumando,

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\dim\left(Sym_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n^2+n}{2}$$

Subespacio de matrices antisimétricas - Ejercicio resuelto

Ejercicio. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ consideramos el siguiente subconjunto:

$$\text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \boxed{A^t = -A} \}$$

← Matrices antisimétricas

a) Demostrar que es un subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\text{Skew}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ porque la matriz nula, $0 \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$

(ii) Sean $A, B \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$. ¿$A+B \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$?

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in \text{Skew}(\mathbb{R})$$

(iii) Sean $A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿$\lambda A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$?

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda \cdot (-A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Skew}_n(\mathbb{R}) \text{ es subespacio de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

b) Hallar una base y la dimensión de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$.

Llamemos $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a la matriz que tiene todo ceros, salvo un 1 en la posición (i,j). Por ejemplo, en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$E_{31} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(i = 3, j = 1)

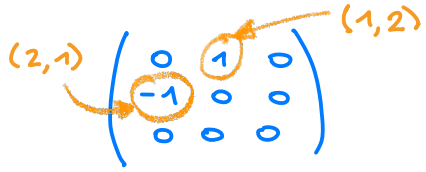
Vamos a escribir una base de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$ usando E_{ij}'s. Para fijar ideas, veamos qué ocurre en $\text{Skew}_3(\mathbb{R})$.

- Necesariamente, los elementos de la diagonal deben de ser 0, porque al trasponer la matriz, no cambian de posición, pero sí de signo.

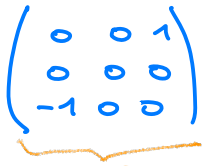
$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

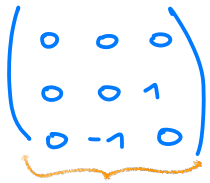
- Las matrices que tienen 1 fuera de la diagonal:



$E_{12} - E_{21}$



$E_{13} - E_{31}$



$E_{23} - E_{32}$

i j $\quad$ i va de 1 a $n-1$ $\quad$ j va de $i+1$ a n

En general, en $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ tendremos las matrices

$$E_{ij} - E_{ji} \quad \text{para } i = 1, _, n-1; \quad j = i+1, _, n.$$

Afirmamos, de hecho, que

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{E_{ij} - E_{ji}\}$$

es base de $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$.

Generadores

Dada $A \in \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ con entradas a_{ij} que cumplen

$$a_{ii} = 0 \text{ si } i = 1, _, n; \quad a_{ij} = -a_{ji} \text{ si } i \neq j$$

↑ Esto es, A antisimétrica.

Podemos escribir

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) \checkmark$$

Ejemplo en $\mathrm{Skew}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (E_{12} - E_{21}) + 2 \cdot (E_{13} - E_{31}) + (-3)(E_{23} - E_{32})$$

Independencia lineal

Si escribimos la matriz nula,

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}),$$

necesariamente los $a_{ij} = 0$

Afirmamos así que

$$\mathcal{B}_{Skew_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{E_{ij} - E_{ji}\}$$

es una base de $Skew_n(\mathbb{R})$.

Dimensión

¿Cuántos elementos hay en $\mathcal{B}_{Skew_n(\mathbb{R})}$?

Hay tantos $\{E_{ij} - E_{ji}\}$ como elementos hay sobre la diagonal

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En toda la matiz hay n^2

Quitando la diagonal, hay $n^2 - n$

Sobre la diagonal hay $\frac{n^2-n}{2}$

$$\dim\left(Skew_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n^2-n}{2}$$

Suma directa de subespacios - Ejercicios resueltos

Ejercicio. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, consideramos los subespacios

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} \leftarrow \text{Matrices simétricas}$$

$$\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\} \leftarrow \text{Matrices antisimétricas}$$

a) Demostrar que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$$

En otros ejercicios ya vimos que $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ son subespacios de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y, de hecho, hallamos bases y las dimensiones

$$\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) \overset{(I)}{=} \frac{n^2+n}{2} \qquad \dim(\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})) \overset{(II)}{=} \frac{n^2-n}{2}$$

Para ver que la suma es directa hay que probar:

(i) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

(ii) Sea $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$.

- Como A es antisimétrica, su diagonal debe de ser 0 (lo demostramos ya), esto es, $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$.
- Además, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ ← si no estamos en la diagonal.

  A simétrica $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

  A antisimétrica $\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$

  $\Rightarrow a_{ji} = -a_{ij} \Rightarrow a_{ji} = 0 = a_{ij}$

  (Como $x = -x$)

  Todos los elem's de la diagonal son 0

  Todos los elem's de fuera de la diagonal son 0

Por tanto,

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{0\} \checkmark$$

(i) Por la fórmula de Grassmann,

$$\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})) + \overbrace{\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}))}^{0} =$$

$$= \underbrace{\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))}_{(I) \to \frac{n^2+n}{2}} + \underbrace{\dim(\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}))}_{(II) \to \frac{n^2-n}{2}}$$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$ con su misma dimensión.

$\Rightarrow \quad M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$ ✓

Concluimos que

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Skew}_n(\mathbb{R})$$

b) ¿Cómo interpretamos este resultado?

Utilizamos una propiedad importante de la suma directa:

> Sea $V = U_1 \oplus U_2$ y $v \in V$. Entonces, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ únicos, de forma que
>
> $$v = u_1 + u_2$$

Dada cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, podemos escribirla de forma única como

$$A = S_1 + S_2,$$

donde S_1 es una matriz simétrica y S_2, antisimétrica.

c) Escribir la siguiente matriz como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos sacando condiciones

$$\begin{cases} x + \alpha = 1 \\ x - \alpha = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + \beta = -2 \\ y - \beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z + \gamma = 2 \\ z - \gamma = -1 \end{cases}$$

Resolviendo cada sistema,

$x = 5/2$ $\quad y = -1/2$ $\quad z = 1/2$

$\alpha = -3/2$ $\quad \beta = -3/2$ $\quad \gamma = 3/2$

En conclusión,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -1/2 \\ 5/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Skew}_3(\mathbb{R})}$$