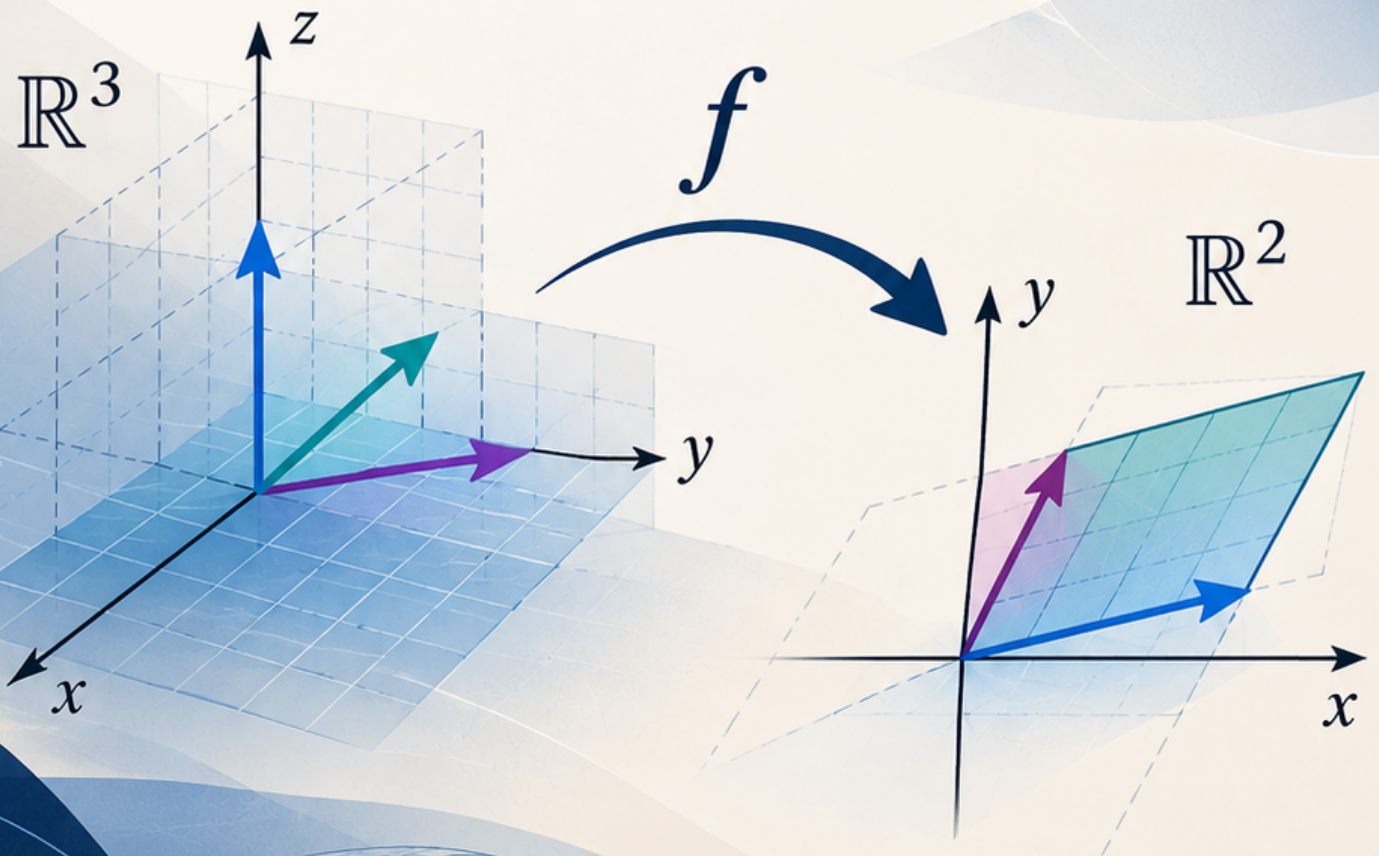


ÁLGEBRA LINEAL

Aplicaciones Lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

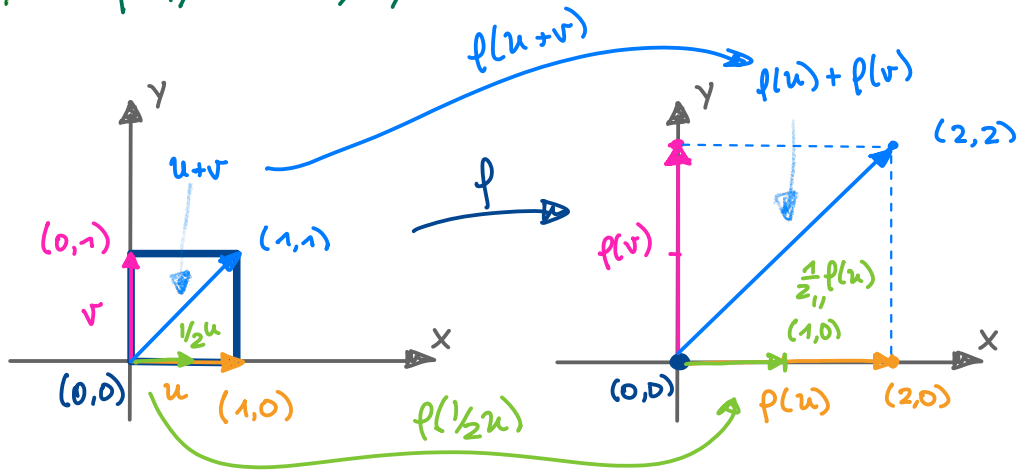


Aplicaciones lineales: idea intuitiva

Antes de entrar en la definición general de aplicación lineal, vamos a ver algunos ejemplos sobre aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo

Tomamos vectores en $\mathbb{R}^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Los transformamos en otros vectores de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo $f(x,y) = (2x, 2y)$



$$f(0,0) = (0,0)$$

$$f(0,1) = (0,2)$$

$$f(1,0) = (2,0)$$

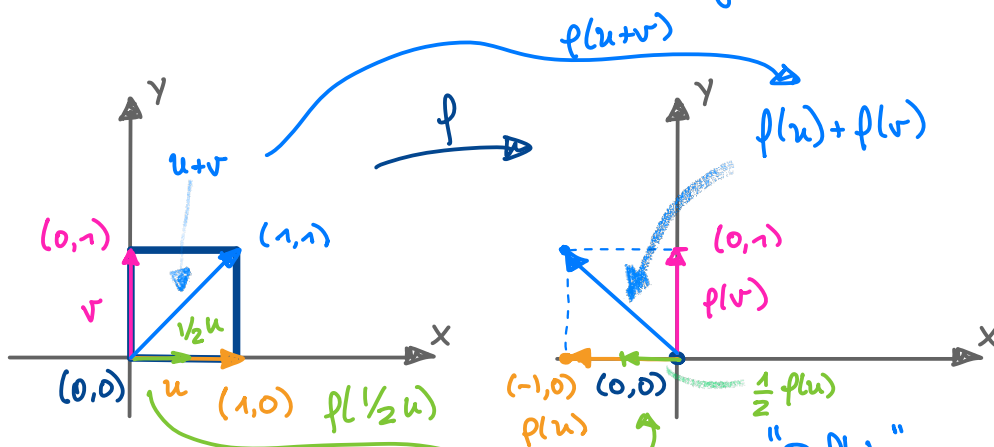
$$f(1,1) = (2,2)$$

Multiplica x2 los vectores

HOMOTECÍA DE RAZÓN 2

Ejemplo $f(x,y) = (-x, y)$

Cambia el signo de x



$$f(0,0) = (0,0)$$

$$f(0,1) = (0,1)$$

$$f(1,0) = (-1,0)$$

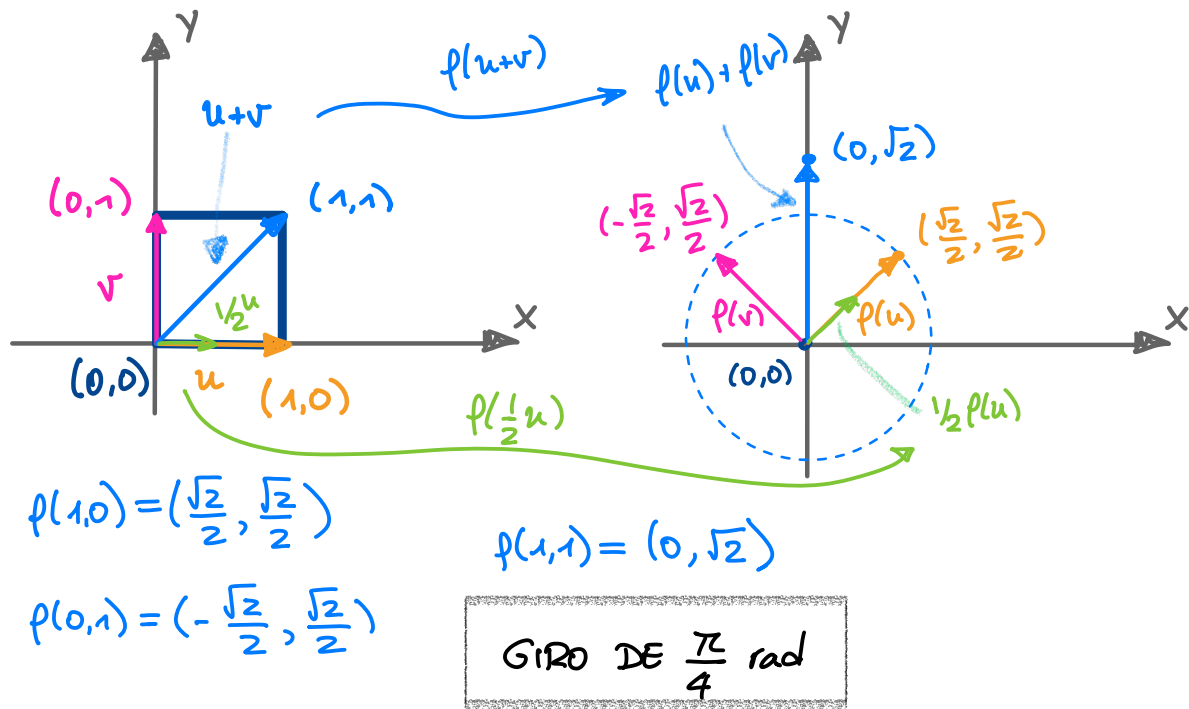
$$f(1,1) = (-1,1)$$

"Refleja" con respecto al eje y

SINETRÍA AXIAL

Ejemplo

$$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$$



¿Qué cumplen estas tres aplicaciones?

- $f(0,0) = (0,0)$
- $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u)$

← Condiciones para que una función sea "aplicación lineal".

Aplicaciones Lineales. Definición y propiedades

Definición (Aplicación Lineal)

Sean V y W dos K -e.v. Decimos que una función

$$f: V \rightarrow W$$

es una aplicación lineal si:

$$(i) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(ii) \quad f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in K.$$

Proposición (Propiedades de las aplicaciones lineales)

Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos K -e.v.

1) $f(0_V) = 0_W$ vector cero en V y en W (podría ser $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$)

2) f es lineal $\Leftrightarrow f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \cdot f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in K$.

3) Dados $v_1, \dots, v_n \in V$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$,

$$\underbrace{f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right)}_{f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)}_{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)}$$



1) $f(0_V) = 0_W$ f lineal

$$f(0_V) = f(0_V + 0_V) \stackrel{\text{lineal}}{=} f(0_V) + f(0_V) \stackrel{-f(0_V)}{\Rightarrow} 0_W = f(0_V) \quad \checkmark$$

2) $\Rightarrow$ Supongamos que f es lineal.

$$f(\lambda v_1 + v_2) = f(\lambda v_1) + f(v_2) \stackrel{f(\alpha u) = \alpha \cdot f(u)}{=} \lambda f(v_1) + f(v_2) \quad \checkmark$$

$\uparrow$ $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

$\Leftarrow$ Supongamos que $f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$

Para ver que f es lineal, comprobamos sus dos condiciones

(i) Tomando $\lambda=1$ en la hipótesis,

$$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \checkmark$$

(ii) Tomando $v_2=0$ en la hipótesis

$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) \checkmark$$

$$3) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$$

Utilizamos inducción en n .

• Caso base: ($n=2$)

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \checkmark$$

• Caso general:

$$\text{- Hipótesis: } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \lambda_{n+1} v_{n+1}\right) \\ &\stackrel{f \text{ lineal}}{=} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_{\text{HIP}} + \lambda_{n+1} v_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) + \lambda_{n+1} f(v_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(v_i) \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Para decidir si una aplicación es lineal, podemos usar la propiedad 2)

$$f \text{ lineal} \Leftrightarrow f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$$

Notación (Conjunto de las aplicaciones lineales)

Si V, W son dos K -e.v., llamamos al conjunto de todas las aplicaciones lineales entre ellos:

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f: V \rightarrow W; f \text{ lineal}\}.$$

Aplicaciones lineales. Ejemplos en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio Decidir si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (2x - y, x)$ $v_1, v_2 \in V$; $\lambda \in K$

$f \text{ lineal} \Leftrightarrow f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$

Tomamos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2 = (x_2, y_2)$$

$$\lambda v_1 + v_2 = \lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$$

$$f(\lambda v_1 + v_2) = f(\overbrace{\lambda x_1 + x_2}^x, \overbrace{\lambda y_1 + y_2}^y)$$

Calculamos
y reordenamos

$$= (2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2), \lambda x_1 + x_2)$$
$$= (2\lambda x_1 - \lambda y_1 + 2x_2 - y_2, \lambda x_1 + x_2)$$

Separamos
 x_1, y_1 de x_2, y_2

$$= (2\lambda x_1 - \lambda y_1, \lambda x_1) + (2x_2 - y_2, x_2)$$

$$= \lambda \cdot (\underbrace{2x_1 - y_1}_{f(x_1, y_1)}, \underbrace{x_1}_{f(x_1, y_1)}) + (\underbrace{2x_2 - y_2}_{f(x_2, y_2)}, \underbrace{x_2}_{f(x_2, y_2)})$$

$$= \lambda f(v_1) + f(v_2) \quad \checkmark$$

f es una aplicación lineal.

Observación Nuestra aplicación lineal,

$$f(x, y) = (2x - y, x)$$

se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix}$$

Esta matriz define la aplicación.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x,y) = (2x+y+1, -y, 3x)$

Si aparecen números
soltos ... malo.

$f(0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0) \Rightarrow f$ no es lineal



IMPORTANTE Para que una aplicación sea lineal, el cero
debe de ir al cero.

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x,y,z) = (x+z, y)$

Tomamos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$f(\lambda v_1 + v_2) = f(\overbrace{\lambda x_1 + x_2}^x, \overbrace{\lambda y_1 + y_2}^y, \overbrace{\lambda z_1 + z_2}^z)$

Separamos los
1's de los
2's $= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda y_1 + y_2)$

$= (\lambda x_1 + \lambda z_1, \lambda y_1) + (x_2 + z_2, y_2)$

$= \lambda (x_1 + z_1, y_1) + (x_2 + z_2, y_2)$

$f(x_1, y_1, z_1) \quad f(x_2, y_2, z_2)$

$= \lambda f(v_1) + f(v_2) \quad \checkmark$

f es lineal

Observación La aplicación

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x,y,z) = (x+z, y)$

se puede escribir en forma matricial:

2 filas $\updownarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \end{pmatrix}$
3 columns $\leftarrow$

d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x^2, x+y)$

Ahora $f(0,0) = (0,0)$,

esto no falla...

Si aparecen términos no lineales...
¡malo!

Probemos con la condición $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

para los vectores $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (-1,0)$

$$\left. \begin{array}{l} f(v_1) = f(1,0) = (1,1) \\ f(v_2) = f(-1,0) = (-1,-1) \end{array} \right\} \rightarrow f(v_1) + f(v_2) = (0,0)$$

Por otro lado, como $v_1 + v_2 = (1,0) + (-1,0) = (0,0)$,

$$f(v_1 + v_2) = f(0,0) = (0,0)$$

¡NO SON IGUALES!

f no es lineal.



IMPORTANTE

Si aparecen términos que no sean de grado 1,
la aplicación no es lineal.

Aplicaciones lineales. Ejemplos con matrices

Ejercicio Decidir si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(A) = \underbrace{\text{tr}(A)}_{\text{Traza de } A: \text{ suma de la diagonal}}$

Tomamos $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

Además, $\text{tr } A = a_{11} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$$\text{tr } B = b_{11} + \dots + b_{nn} = \sum_{i=1}^n b_{ii}$$

En nuestro caso v_1 y v_2 son A, B

$f \text{ lineal} \Leftrightarrow f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$

$$f(\lambda A + B) = \text{tr}(\lambda A + B)$$

Reordenando $\downarrow$

$$= (\lambda a_{11} + b_{11}) + \dots + (\lambda a_{nn} + b_{nn})$$
$$= \underbrace{\lambda (a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{tr } A} + \underbrace{(b_{11} + \dots + b_{nn})}_{\text{tr } B}$$

$$= \lambda f(A) + f(B)$$

f es lineal

b) $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(A) = \det A$

Vamos a demostrar que no se cumple que $f(A+B) = f(A) + f(B)$ con un contraejemplo en $M_2(\mathbb{R})$. Tomamos:

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \det A = 1 \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leadsto \det B = 2 \end{array} \right\} f(A) + f(B) = 3$$

$\uparrow$
 $\neq$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \det(A+B) = 6 \rightarrow \rho(A+B) = 6$$

f no es lineal

Podríamos preverlo, pues si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

grado distinto de 1

$$c) \quad \rho: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad \rho(A) = A^t$$

Tomamos $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\rho(\lambda A + B) = (\lambda A + B)^t = (\lambda A)^t + B^t = \lambda A^t + B^t = \lambda \rho(A) + \rho(B)$$

Propiedades de la traspuesta

ρ es lineal

$$d) \quad \rho: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4;$$

$$\rho \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right) = (x, y, z, t)$$

Sean $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}$$

$$\rho(\lambda A + B) = \rho \left(\begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda y + y' \\ \lambda z + z' & \lambda t + t' \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

$$= \lambda (x, y, z, t) + (x', y', z', t')$$

$$= \lambda \rho(A) + \rho(B)$$

ρ es lineal

Aplicaciones lineales. Ejemplos con polinomios

Ejercicio Decidir si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $D: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]; \quad D(p) = p' \quad \leftarrow D(p(x)) = p'(x)$

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$$

Polinomios de grado menor o igual que n
con coeficientes reales.

v_1, v_2 son aquí

$$f \text{ lineal} \Leftrightarrow f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$$

polinomios y
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$D(\lambda p + q) = (\lambda p + q)' = \lambda p' + q' = \lambda D(p) + D(q) \quad \checkmark$$

Reglas de derivación

D es lineal.

b) $I: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad I(p) = \int_0^1 p(x) dx$

Tomamos $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$I(\lambda p + q) = \int_0^1 (\lambda p(x) + q(x)) dx$$

Propiedades de la integral definida

$$= \lambda \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx$$
$$= \lambda I(p) + I(q) \quad \checkmark$$

I es lineal.

$$c) f: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$f(\underline{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}) = (a_n, \dots, a_1, a_0)$$

Nos quedamos con los coeficientes.

Tomamos $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, con

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0; \quad q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

$$f(\lambda p + q) = f((\lambda a_n + b_n) x^n + \dots + (\lambda a_1 + b_1) x + (\lambda a_0 + b_0))$$

$$= (\lambda a_n + b_n, \dots, \lambda a_1 + b_1, \lambda a_0 + b_0)$$

Separamos

$$= \lambda (a_n, \dots, a_1, a_0) + (b_n, \dots, b_1, b_0)$$

$$= \lambda f(p) + f(q) \quad \checkmark$$

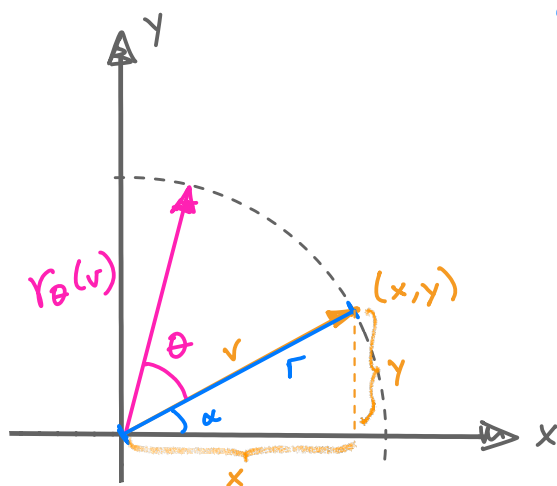
f es lineal.

Aplicaciones lineales. Giro en $\mathbb{R}^2$

Ejercicio Dar la expresión algebraica de una aplicación

$$\gamma_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que, para cada vector $v=(x,y)$, nos devuelva el vector del plano correspondiente a hacer un giro de ángulo θ .



Primero, reescribimos las coordenadas (x,y) del vector v para que queden en función de $|v|=r$ y el ángulo α . Usando trigonometría elemental,

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \cdot \text{sen } \alpha \quad (*)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cdot \text{cos } \alpha$$

Queremos conocer las coordenadas de $\gamma_\theta(v)$, que corresponden a un vector de módulo también r y ángulo $\alpha+\theta$:

$$\gamma_\theta(v) = (r \cdot \text{cos}(\alpha+\theta), r \cdot \text{sen}(\alpha+\theta)) \quad (*)$$

Pero queremos las coordenadas en x e y :

$$\gamma_\theta(x,y) = (r \cdot (\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \theta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \theta), r (\text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \theta + \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \theta))$$

$$= (\overset{x}{r \text{cos } \alpha} \text{cos } \theta - \overset{y}{r \text{sen } \alpha} \text{sen } \theta, \overset{x}{r \text{cos } \alpha} \text{sen } \theta + \overset{y}{r \text{sen } \alpha} \text{cos } \theta)$$

$$(*) = (x \text{cos } \theta - y \text{sen } \theta, x \text{sen } \theta + y \text{cos } \theta)$$

El giro $\gamma_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de ángulo θ alrededor del origen es

$$\gamma_\theta(x,y) = (x \text{cos } \theta - y \text{sen } \theta, x \text{sen } \theta + y \text{cos } \theta)$$

Determinación de una aplicación lineal

Ejercicio Sean V, W dos K -e.v de dimensión finita. Sea

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

una base de V y $w_1, \dots, w_n \in W$ vectores cualesquiera.

Demuestre que existe una única aplicación lineal

$$f: V \rightarrow W$$

que cumple que $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Como B_V es una base, dado $v \in V$, podemos escribir

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Definimos $f: V \rightarrow W$ como:

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$

Veamos que es la aplicación que buscamos:

$$1) \quad f(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = w_1$$

$$\uparrow \quad v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$$

Del mismo modo, $f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n$. ✓

2) Comprobemos que f es lineal

$$f \text{ lineal} \Leftrightarrow \underbrace{f(\lambda v_1 + v_2)}_{(I)} = \underbrace{\lambda f(v_1) + f(v_2)}_{(II)}$$

Tomamos $v, v' \in V$ y $\lambda \in K$: (I) (II)

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \quad v' = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_n v_n$$

$$(I) \quad \lambda v + v' = (\lambda \lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n + \lambda'_n) v_n$$

$$\begin{aligned} f(\lambda v + v') &= (\lambda \lambda_1 + \lambda'_1) w_1 + \dots + (\lambda \lambda_n + \lambda'_n) w_n \\ &= \lambda (\underbrace{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n}_{f(v)}) + (\underbrace{\lambda'_1 w_1 + \dots + \lambda'_n w_n}_{f(v')}) \\ &= \lambda f(v) + f(v') \quad (II) \quad \checkmark \end{aligned}$$

3) Falta ver que f es única. Supongamos que $g: V \rightarrow W$ es otra aplicación lineal con $g(v_1) = w_1, \dots, g(v_n) = w_n$.

Dado $v \in V$,

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

f lineal

$$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

$$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$

$$= \lambda_1 g(v_1) + \dots + \lambda_n g(v_n)$$

$$= g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

$$= g(v)$$

$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$$

$$g(v_1) = w_1, \dots, g(v_n) = w_n$$

g lineal

Como $f(v) = g(v)$ para cualquier $v \in V$, ¡son la misma aplicación lineal! g no puede ser otra. ✓



IMPORTANTE

Una aplicación lineal $f: V \rightarrow W$ queda completamente determinada si conocemos las imágenes de los elementos de una base de V ,

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

Hemos visto en ejemplos anteriores que a una aplicación lineal le podemos asociar una matriz. Vamos a demostrar esto en general y a ver cómo se hace. Para ello, partimos del siguiente resultado, que también conocemos:

Una aplicación lineal $f: V \rightarrow W$ queda completamente determinada si conocemos las imágenes de los elementos de una base de V ,

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Supongamos que tenemos una apl. lineal

$$f: \underbrace{V}_B \longrightarrow \underbrace{W}_C$$

Bases de V y W , respectivamente.

donde

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{y} \quad C = \{w_1, \dots, w_m\}.$$

Para conocer f , basta con conocer las imágenes de $v_1, \dots, v_n$, a saber:

$$f(v_1) = \lambda_{11} w_1 + \dots + \lambda_{1m} w_m$$

$$\vdots$$
$$f(v_n) = \lambda_{n1} w_1 + \dots + \lambda_{nm} w_m$$

Si escribimos esto en coordenadas de las bases B y C , tenemos

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)_B \longleftarrow v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_1) = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1m})_C$$

Buscamos una matriz que cumpla:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \circ & \dots & \circ \\ \lambda_{12} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & & & \\ \lambda_{1m} & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1m} \end{pmatrix}_C$$

v_1 $p(v_1)$

Coordenadas de $p(v_1)$ en la base C .

¿Qué ocurre si miramos v_2 ?

$$v_2 = (0, 1, \dots, 0)_B \leftarrow v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$p(v_2) = (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2m}) \leftarrow p(v_2) = \lambda_{21} w_1 + \lambda_{22} w_2 + \dots + \lambda_{2m} w_m$$

Si volvemos a la matriz que estamos construyendo,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{2m} \end{pmatrix}_C$$

haciendo esto con todos los vectores de la base B , llegamos a la matriz

$$M_p = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_{11}} & \boxed{\lambda_{21}} & \dots & \boxed{\lambda_{n1}} \\ \boxed{\lambda_{12}} & \boxed{\lambda_{22}} & \dots & \boxed{\lambda_{n2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{\lambda_{1m}} & \boxed{\lambda_{2m}} & \dots & \boxed{\lambda_{nm}} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{MATRIZ ASOCIADA A} \\ p: V_B \rightarrow W_C \end{matrix}$$

$p(v_1)$ $p(v_2)$ $p(v_n)$ en coordenadas de C



La matriz asociada a una aplicación lineal

$$p: V_B \rightarrow W_C$$

es la que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los elementos de la base B escritos en la base C .

Ejercicio Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \leftarrow \text{Bases estándar}$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y + 2, x + 3y - 2z)$$



IMPORTANTE

La matriz asociada a una aplicación lineal

$$p: \mathcal{V}_B \rightarrow \mathcal{W}_C \quad \text{Bases asociadas}$$

es la que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los elementos de la base B escritos en la base C .

$$(2x - y + 2, x + 3y - 2z)$$

$$p(1, 0, 0) = (2, 1)$$

$$p(0, 1, 0) = (-1, 3)$$

$$p(0, 0, 1) = (1, -2)$$

Por
columnas

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

3 col.

$$M_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2 filas

Utilizar M_p para calcular $p(1, 1, -1)$

$$p(1, 1, -1) = M_p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Dada la aplicación lineal Polinomios de grado hasta 3

$$D: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$p(x) \longmapsto p'(x) \quad \leftarrow D(p(x)) = p'(x)$$

Hallar la matriz asociada a D en las bases estándar

$$B_0 = \{1, x, x^2, x^3\} \quad B'_0 = \{1, x, x^2\}$$

Hallamos las imágenes de los elem. de B_0 por D , escritos en la base B'_0 .

$$D(1) = 0 \quad \leftarrow 0 + 0x + 0x^2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 \quad \leftarrow 1 + 0x + 0x^2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x \quad \leftarrow 0 + 2x + 0x^2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^3) = 3x^2 \quad \leftarrow 0 + 0x + 3x^2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz de la aplicación en las bases estándar es:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular con M_D , $D(5 + 2x - 3x^2 + 2x^3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{B'_0} 2 - 6x + 6x^2$$

Ejercicio Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \leftarrow \text{Bases canónicas}$$

que cumple:

$$p(1,1,0) = (2,1); \quad p(0,1,1) = (1,3); \quad p(1,1,1) = (3,2)$$

Tenemos que hallar

$$p(1,0,0) \quad p(0,1,0) \quad \text{y} \quad p(0,0,1).$$

Por linealidad, como

$$(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$$

$$p(1,1,0) = p(1,0,0) + p(0,1,0)$$

$$\begin{cases} p(1,0,0) + p(0,1,0) = (2,1) & a \\ p(0,1,0) + p(0,0,1) = (1,3) & b \\ p(1,0,0) + p(0,1,0) + p(0,0,1) = (3,2) & c \end{cases}$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3$

! Es un sistema lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$

Lo reescribimos:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = a \\ w_2 + w_3 = b \\ w_1 + w_2 + w_3 = c \end{cases} \xrightarrow{\text{Forma matricial}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \xrightarrow{\text{Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b+c \\ 0 & 1 & 0 & a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+c \end{array} \right)$$

Forma algebraica

$$p(1,0,0) = -(1,3) + (3,2) = (2, -1)$$

$$p(0,1,0) = (2,1) + (1,3) - (3,2) = (0, 2)$$

$$p(0,0,1) = -(2,1) + (3,2) = (1, 1)$$

La matriz asociada a p es:

$$M_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Dada la aplicación lineal

$$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

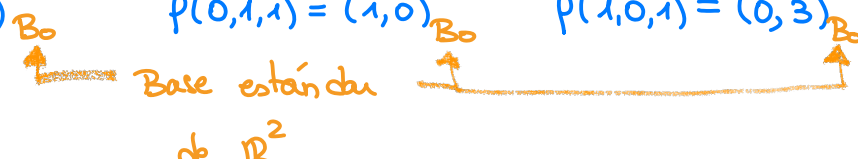
$$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, 2x - y + z);$$

hallar la matriz asociada a p en las bases

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\} \quad C = \{(-1, 0), (1, 1)\}$$

Para calcular la matriz de $p: \mathbb{R}_B^3 \rightarrow \mathbb{R}_C^2$, tenemos que escribir las imágenes de los vectores de B en coordenadas de C . Comenzamos calculando

$$p(1, 1, 0) = (3, 1)_{B_0} \quad p(0, 1, 1) = (1, 0)_{B_0} \quad p(1, 0, 1) = (0, 3)_{B_0}$$



Base estándar de $\mathbb{R}^2$

Hay que escribir los vectores en la base C . Lo hacemos en general: dado $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, sus coordenadas en C serán:

$$(u, v) = \lambda_1(-1, 0) + \lambda_2(1, 1) \longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = u \\ \lambda_2 = v \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para λ_1 y λ_2 , obtenemos:

$$\lambda_1 = v - u \quad \lambda_2 = v$$

Podemos escribir ahora,

$$(3, 1)_{B_0} = (-2, 1)_C \quad (1, 0)_{B_0} = (-1, 0)_C$$



$$(0, 3)_{B_0} = (3, 3)_C$$

La matriz de $p: \mathbb{R}_B^3 \rightarrow \mathbb{R}_C^2$ es:

$$M_p = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

! No es la misma que la de $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en las bases estándar

$$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, 2x - y + z);$$

$$p(1, 0, 0) = (1, 2)$$

$$p(0, 1, 0) = (2, -1)$$

$$p(0, 0, 1) = (-1, 1)$$

$$\leadsto M_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad en bases distintas (cambio de base)

Ejercicio Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \text{id}: \mathbb{R}_{B_0}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_B^3 \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

donde

$$B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}; \quad B = \{(0,1,-1), (1,0,-1), (1,-1,1)\}$$

Tenemos que escribir

$$\text{id}(1,0,0) = (1,0,0) \quad \text{id}(0,1,0) = (0,1,0) \quad \text{id}(0,0,1) = (0,0,1)$$

Están en la base B_0

Hay que escribirlos en la base B . Lo hacemos de forma general, para un vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ en la base B_0 :

$$(a,b,c) = \lambda_1(0,1,-1) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(1,-1,1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 - \lambda_3 = b \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{cases} \lambda_1 = a + 2b + c \\ \lambda_2 = -b - c \\ \lambda_3 = a + b + c \end{cases}$$

↑ Coord. en B de (a,b,c)

Calculando λ_1, λ_2 y λ_3 para nuestros vectores,

$$\begin{aligned} \overset{a}{\downarrow} \overset{b}{\downarrow} \overset{c}{\downarrow} (1,0,0)_{B_0} &= (1,0,1)_B & (0,1,0)_{B_0} &= (2,-1,1)_B & (0,0,1)_{B_0} &= (-1,-1,1)_B \end{aligned}$$

La matriz de la aplicación de cambio de base

$$\text{id}: \mathbb{R}_{B_0}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_B^3$$

es:

$$M_{B_0 \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (2, 1, -2)_{B_0}$ en la base

$$B = \{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 1)\}?$$

Como tenemos la matriz de cambio de base $M_{B_0 \rightarrow B}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$