

Subespacios vectoriales

Subespacios vectoriales. Definición y ejemplos.

Definición (Subespacio vectorial)

Sea V un K -e.v. y $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Decimos que U es subespacio vectorial de V , si U también es un K -e.v.

Proposición (caracterización de subespacios)

Sea V un K -e.v. y $U \subseteq V$ un subconjunto. U es subespacio de V si, y solo si, se cumple:

- (i) $U \neq \emptyset$
- (ii) $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
- (iii) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$

Para comprobar que U es subespacio de V , solo hay que ver que se cumplen (i), (ii) y (iii).

DEM

$\Rightarrow$ Sup. que U es un subespacio de V .

(i) Se cumple porque en la def. de subespacio, se pide que $U \neq \emptyset$

(ii) y (iii) se cumplen porque la suma es interna y el producto por escalares, externo. ✓

$\Leftarrow$ Sup. que se cumplen (i)-(iii) y tenemos que ver que U es subespacio, esto es, que es un K -e.v.

(i) nos asegura que $U \neq \emptyset$

(ii) nos dice que la suma es interna (SV1)

(iii), que el producto por escalares es externo (PVS)

El resto de las propiedades, como $U \subseteq V$ y los elementos de V las cumplen, los de U también. ✓

Ejemplo. Decidir si los siguientes subconjuntos son subespacios.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^3$

(i) $U \neq \emptyset$ porque $(0, 0, 0) \in U$ ✓

(ii) Tomamos $u_1, u_2 \in U$, esto es,

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{con} \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$u_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad \text{con} \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

Veamos si $u_1 + u_2 \in U$

$$u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\overbrace{x_1 + x_2}^X, \overbrace{y_1 + y_2}^Y, \overbrace{z_1 + z_2}^Z)$$

Para que $u_1 + u_2 \in U$, debe cumplirse que $X + Y + Z = 0$. ¿Se cumple?

$$X + Y + Z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$$

Quitamos
paréntesis
y reordenamos

$$= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in U \quad \checkmark$$

(iii) Tomamos $u \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u = (x, y, z) \quad \text{con} \quad x + y + z = 0$$

Veamos si $\lambda u \in U$:

$$\lambda u = \lambda \cdot (x, y, z) = (\overbrace{\lambda x}^X, \overbrace{\lambda y}^Y, \overbrace{\lambda z}^Z)$$

Comprobamos si cumple la condición de U :

$$X + Y + Z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda \cdot (x + y + z) = 0 \Rightarrow \lambda u \in U \quad \checkmark$$

Concluimos que U es subespacio de $\mathbb{R}^3$

(b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 0, \quad 2z - t = 8\}$

Cuando aparecen
números sueltos
 $\neq 0 \dots$ malo

Una de las propiedades de que U sea subespacio es que el vector cero (el neutro para la suma de vectores) esté en el conjunto, pero en este caso,

$$(0, 0, 0, 0) \notin U \quad \text{porque no cumple} \quad 2 \cdot 0 - 0 = 8$$

U no es subespacio de $\mathbb{R}^4$.



Un subespacio siempre tiene el vector cero

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ como subesp. de $\mathbb{R}^3$.

Si U fuera un subesp., Cuando aparecen términos de grado mayor que 1... malo.
debe de cumplir que $u_1 + u_2 \in U$. En este caso $(0, 0, 0) \in U$ porque cumple la condición

Sin embargo, si tomamos

$$u_1 = (1, 0, 0), \text{ que } u_1 \in U \text{ porque } 1 \cdot 0 = 0$$

$$u_2 = (0, 1, 0), \text{ que } u_2 \in U \text{ porque } 0 \cdot 1 = 0$$

tenemos que $u_1 + u_2 = (1, 1, 0)$ y $1 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \notin U$

U no es un subespacio vectorial

⚠ Las relaciones que definen un subespacio deben de ser lineales (de grado 1)

Subespacios vectoriales. Ejemplos.

Ejemplo. Decidir si los siguientes subconjuntos son subespacios:

$$(a) U = \{(3\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ en } \mathbb{R}^4$$

(i) $U \neq \emptyset$ porque, por ej., para $\alpha = \beta = 0 \rightarrow (0, 0, 0, 0) \in U$ ✓

$$\alpha = \beta = 0 \rightarrow (0, 0, 0, 0) \in U \checkmark$$

(ii) Tomamos $u_1, u_2 \in U$,

$$u_1 = (3\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) \quad u_2 = (3\alpha', \alpha', \alpha' + \beta', \beta')$$

$$u_1 + u_2 = (3\alpha + 3\alpha', \alpha + \alpha', \alpha + \beta + \alpha' + \beta', \beta + \beta')$$

$$= (3(\alpha + \alpha'), \alpha + \alpha', (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta'), \beta + \beta')$$

$$\begin{matrix} A = \alpha + \alpha' \\ B = \beta + \beta' \end{matrix} \rightarrow = (3A, A, A + B, B) \text{ con } A, B \in \mathbb{R}$$

$$u_1 + u_2 \in U \checkmark$$

(iii) Tomamos $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$, con $u = (3\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta)$

$$\lambda u = \lambda \cdot (3\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) = (3\lambda\alpha, \lambda\alpha, \lambda\alpha + \lambda\beta, \lambda\beta)$$

$$\begin{aligned} A &= \lambda\alpha \\ B &= \lambda\beta \end{aligned} \Rightarrow (3A, A, A+B, B) \text{ con } A, B \in \mathbb{R}$$

$$\lambda u \in U \checkmark$$

Concluimos que U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

$$(b) W = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = f(1) \} \text{ en } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ función} \}$$

$$(i) W \neq \emptyset \text{ porque } f(x) = 5 \text{ cumple } f(0) = 5 = f(1) \Rightarrow f \in W \checkmark$$

$$(ii) \text{ Sean } f, g \in W, \text{ esto es, funciones con } f(0) = f(1) \text{ y } g(0) = g(1).$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f+g)(1) \quad \text{Def}$$

$$f+g \in W \checkmark$$

$$(iii) \text{ Sea } f \in W \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot f(1) = (\lambda f)(1) \quad \text{Def}$$

$$\lambda f \in W \checkmark$$

W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$(c) M_1 = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{rang } A = 1 \} \text{ en } M_2(\mathbb{R})$$

M_1 no es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ porque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_1$$

ya que su rango es 0. ¡El neutro siempre debe de estar en el subespacio!

$$(d) M_2 = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) : AM = MA \} \text{ en } M_2(\mathbb{R}), \text{ donde } M \text{ es una matriz fija de } M_2(\mathbb{R}).$$

M_2 es el subconj. de $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices que conmutan con la matriz fija M .

(i) $M_2 \neq \emptyset$ porque $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2$, ya que, $M I_2 = M = I_2 M$. ✓

(ii) Tomamos $A, A' \in M_2$, esto es, $AM = MA$ y $A'M = MA'$.

$$(A+A') \cdot M = AM + A'M = MA + MA' = M(A+A')$$

$A+A'$ conmuta con M $A+A' \in M_2$ ✓

(iii) Tomamos $A \in M_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $AM = MA$.

$$(\lambda A) \cdot M = \lambda \cdot AM = \lambda MA = M(\lambda A)$$

λA conmuta con M

$\lambda A \in M_2$ ✓

Un n.º sí conmuta con una matriz

$$\lambda M = M \cdot \lambda$$

M_2 es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(e) $M_3 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ en $M_n(\mathbb{R})$

M_3 son las matrices de $M_n(\mathbb{R})$ simétricas. Recordemos dos propiedades de transponer matrices:

$$(I) \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(II) \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$$

Demostremos que M_3 es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$:

(i) $M_3 \neq \emptyset$ porque la matriz identidad $I_n = I_n^t \Rightarrow I_n \in M_3$ ✓

(ii) Tomamos $A, B \in M_3$, esto es, $A = A^t$ y $B = B^t$

$$(A+B)^t \stackrel{(I)}{=} A^t + B^t = A + B \Rightarrow A+B \in M_3 \quad \checkmark$$

(iii) Tomamos $A \in M_3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $A = A^t$

$$(\lambda A)^t \stackrel{(II)}{=} \lambda A^t = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in M_3 \quad \checkmark$$

M_3 es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$

(p) $M_4 = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 1 \}$ en $M_n(\mathbb{R})$, donde $\text{tr}(A)$ significa traza de A y es la suma de los elementos de la diagonal de A .

M_4 no es subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$ porque la matriz nula

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

tiene $\text{tr}(O_n) = 0 \neq 1 \Rightarrow O_n \notin M_4$.

(g) $P_1 = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : (x-1) \text{ divide a } p(x) \}$

$\mathbb{R}$ -e.v. de los
polinomios de grado ≤ 3

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$p(x)$ es múltiplo de $(x-1)$,

$$p(x) = (x-1) \cdot q(x)$$

(i) $P_1 \neq \emptyset$ porque $p(x) = 0 = 0 \cdot (x-1) \checkmark$

(ii) Tomamos $p_1(x), p_2(x) \in P_1$, esto es,

$$p_1(x) = (x-1) \cdot q_1(x); \quad p_2(x) = (x-1) \cdot q_2(x)$$

para ciertos $q_1(x), q_2(x)$.

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)(x) &= p_1(x) + p_2(x) = (x-1)q_1(x) + (x-1)q_2(x) \\ &= (x-1)[q_1(x) + q_2(x)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_1(x) + p_2(x) \in P_1 \checkmark$$

(iii) Tomamos $p(x) \in P_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda p(x) = \lambda \cdot (x-1)q(x) = (x-1)[\lambda q(x)] \Rightarrow \lambda p(x) \in P_1 \checkmark$$

P_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$

$$(h) \mathcal{P}_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}$$

$$(i) \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \text{ porque para } p(x) = x - 1, \quad p(1) = 0 \quad \checkmark$$

$$(ii) \text{ Tomamos } p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{P}_2, \text{ esto es, } p_1(1) = 0 = p_2(1)$$

$$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 \Rightarrow (p_1 + p_2)(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \checkmark$$

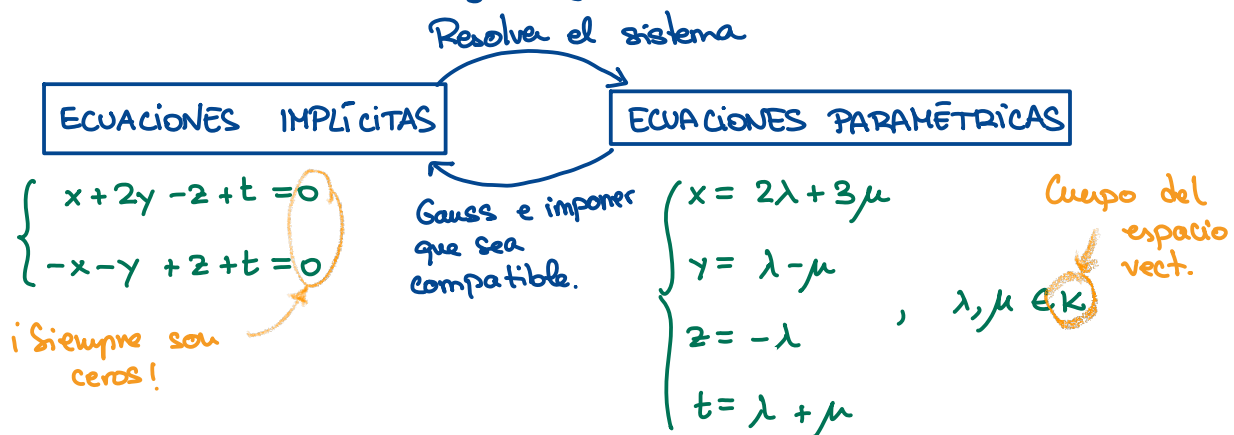
$$(iii) \text{ Tomamos } p(x) \in \mathcal{P}_2 \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = 0 \Rightarrow (\lambda p)(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \checkmark$$

$\mathcal{P}_2$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$

Ecuaciones de un subespacio vectorial

Un subespacio vectorial viene definido por ecuaciones lineales (polinomios de grado 1) y hay dos tipos.



Ejemplo. Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido

por

$$W: \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda \\ t = \lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Idea: Si tomamos $(x, y, z, t) \in W$, deben existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que hagan que el sistema anterior se cumpla, es decir, que sea compatible.

$$(x, y, z, t) = (5, 0, -1, 2) \rightsquigarrow \lambda = 1, \mu = 1$$

Si resolvemos el sistema como si conociéramos (x, y, z, t) y las incógnitas fueran λ, μ , imponiendo que sea compatible, tendremos condiciones:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \xrightarrow{\text{Forma matricial}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{p_1 \leftrightarrow p_3 \\ p_1 = -p_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 3 & x \\ 1 & 1 & t \end{array} \right)$$

Términos indep, porque los estamos tomando fijos

$$\begin{array}{l} p_2 = p_2 - p_1 \\ p_3 = p_3 - 2p_1 \\ p_4 = p_4 - p_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y - z \\ 0 & 3 & x - 2z \\ 0 & 1 & t - z \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{p_3 = p_3 + 3p_2 \\ p_4 = p_4 + p_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y - z \\ 0 & 0 & x + 3y - 5z \\ 0 & 0 & y - 2z + t \end{array} \right)$$

Como el sist. tiene que ser compatible, debe darse, por el T. de Rouché-Fröbenius, que

$$\text{rang } A = \text{rang } A^+$$

Para que esto ocurra, todo lo que queda bajo la línea debe de ser 0.

$$W: \begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones implícitas de W

Ejemplo. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$u: \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

Si tomamos $(x, y, z, t) \in U$, debe cumplir las ecuaciones, por lo que será solución del sistema. Resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Pasamos a forma algebraica.}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 & \rightarrow x = -y + 3z \\ -2y + 3z + t = 0 & \rightarrow t = 2y - 3z \end{cases}$$

Llamando $y = \lambda$ y $z = \mu$,

$$U: \begin{cases} x = -\lambda + 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = 2\lambda - 3\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas

Generadores y bases de un subespacio vectorial

Def (Subespacio generado por un conjunto de vectores)

Sea V un K -e.v. y sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto no vacío de V . Decimos que U es el subespacio generado por S y escribimos

$$U = \langle S \rangle \quad \text{o} \quad U = \text{span}(S) \quad \text{o} \quad U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle,$$

si U es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S

Si U' es otro subespacio que contiene a S , entonces $U \subseteq U'$.

Prop.

Sea V un K -e.v. y $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. Entonces

$\angle$ $\langle S \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in K, i=1, \dots, m \}$
Conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_m$.

DEM.

Llamemos $U = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in K, i=1, \dots, m \}$. Tenemos que ver que es $\langle S \rangle$, es decir, el menor subespacio que contiene a $v_1, \dots, v_m$.

(1) $v_1, \dots, v_m \in U$ ✓

Tomamos $\lambda_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i \\ 1, & \text{si } j = i. \end{cases}$

$v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_m$ para cada $i=1, \dots, m$

(2) U es subespacio de V ✓

(i) $U \neq \emptyset$ porque $S \neq \emptyset$ y $S \subseteq U$

(ii) Tomamos dos elementos de U :

$u_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

$u_2 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$

$u_1 + u_2 = \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}_{\alpha_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_m + \mu_m)}_{\alpha_m} v_m \in U$

(iii) Tomamos $u \in U$ y $\lambda \in K$,

$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

$\lambda u = \lambda (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \underbrace{(\lambda \lambda_1)}_{\alpha_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda \lambda_m)}_{\alpha_m} v_m \in U$

(3) U es el menor subespacio que contiene a $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ ✓

Sup. que U' es otro subespacio de V que contiene a S . Si contiene a S , contiene a $v_1, \dots, v_m$ y a cualquier comb. lin suya.

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m}_{\in U} \in U'$$

$\Rightarrow$ Todos los elementos de U están en $U' \Rightarrow U \subseteq U'$



¿Cómo obtener una base de un subespacio?

Si tenemos un conjunto de generadores

$$S = \{v_1, \dots, v_m\}$$

basta eliminar los que son lin. dependientes.

Así, no solo obtenemos una base, sino también la dimensión.

Ej: Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1), (-2, 6, 3, -7) \rangle$$

U está generado por tres vectores, pero podemos eliminar los dependientes usando Gauss:

Generan lo mismo

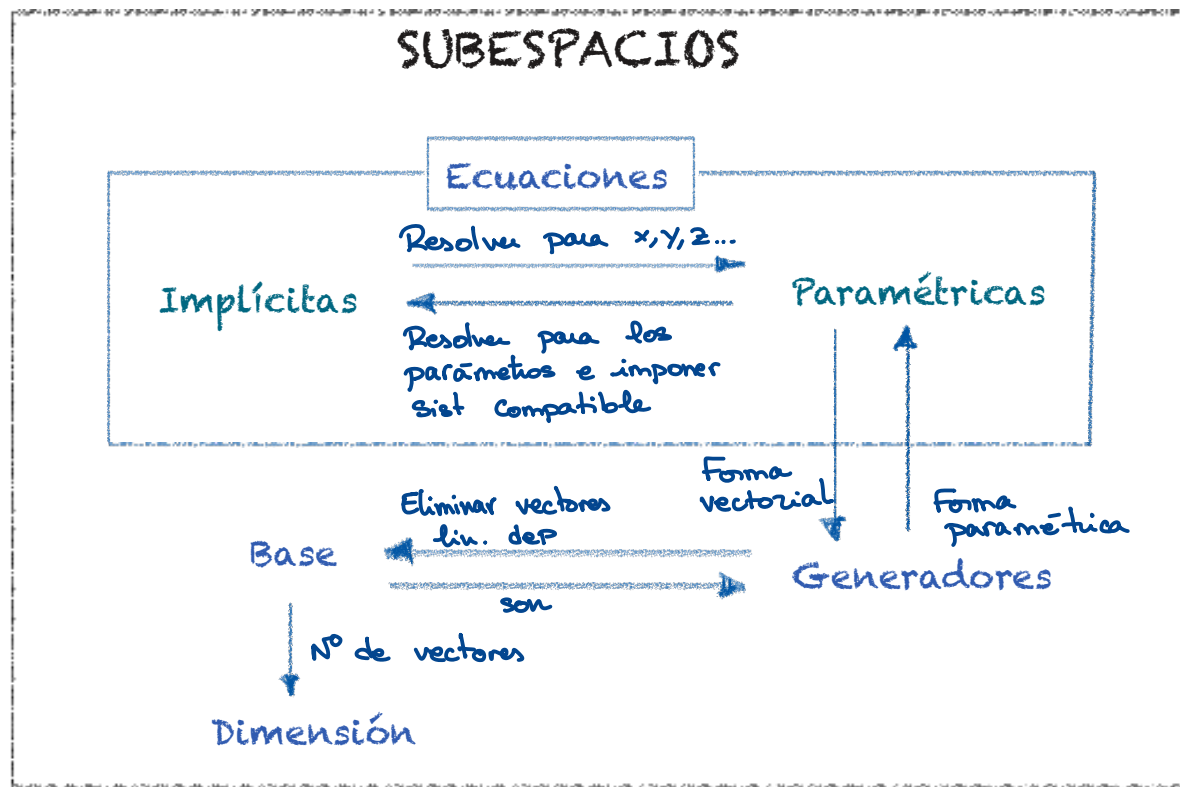
los tres que solo los dos primeros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos una base de U y su dimensión:

$$B_U = \{(1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1)\}; \quad \dim U = 2$$

Base, dimensión y ecuaciones de subespacios



Ej Halla una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1), (-2, 6, 3, -7) \rangle$$

Generadores de U

Base y dimensión

Eliminamos vectores lin. dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es lin. dep.

$$B_U = \{(1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1)\} \text{ y } \dim U = 2$$

Ecuaciones paramétricas

Como B_U es base, todos los elementos de U son combinación lineal de los de B_U : si tomamos $(x, y, z, t) \in U$,

$$(x, y, z, t) = \lambda \cdot (1, -2, -1, 3) + \mu \cdot (0, 2, 1, -1) \leftarrow \text{Forma vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ y = (-2) \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \\ z = (-1) \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \\ t = 3 \cdot \lambda + (-1) \cdot \mu \end{cases}$$

$$u: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 2\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 3\lambda - \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Forma paramétrica

Resolven como si x, y, z, t fueran números y λ, μ las

Ecuaciones implícitas

Si elegimos $(x, y, z, t) \in u$, deben de existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla el sistema de las ecuaciones paramétricas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

Variables

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & -y+2z \\ 0 & 0 & -4x+y+2t \end{array} \right)$$

Deben de ser cero

Para que sea compatible

Vectores de la base

$$u: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 4x - y - 2t = 0 \end{cases}$$

Ej. Halla una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$w: \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones implícitas

Ecs. paramétricas

Resolvemos el sistema por el método de Gauss y llegamos a:

$$w: \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3}\mu \\ y = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Forma vectorial

Base y dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base (porque son lin. indep)

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1 \right) \right\} \quad \text{y} \quad \dim W = 2$$

Si cambiamos un vector de la base por un múltiplo suyo, sigue siendo base (por el Lema de Intercambio de Steinitz)

$$\mathcal{B}'_W = \{ (1, 1, 3, 0), (-2, 1, 0, 3) \} \quad \text{es otra base de } W.$$

Ej Halla una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$V: \begin{cases} x = \lambda + \mu + \alpha \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \\ t = \lambda + \alpha \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$$

3 parámetros

Base y dimensión

Escribimos las paramétricas en forma vectorial.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generadores (o base)

Como son lin. indep,

$$\mathcal{B}_V = \{ (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1) \}$$

$$\text{y} \quad \dim V = 3$$

Ecs implícitas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

$\leadsto$ Gauss $\leadsto$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & -x+2 \\ 0 & 0 & 1 & -2+t \\ 0 & 0 & 0 & -x+y-2+t \end{array} \right)$$

4 - 1

Debe ser 0

Imponemos que sea compatible

$$\checkmark: -x+y-2+t=0$$

1 ecuación en $\mathbb{R}^4$ (dim 4)

Ej Halla una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1), (-2, 6, 3, -7) \rangle$$

Generadores de U

Base y dimensión

Eliminamos vectores lin. dependientes:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -7 \end{array} \right) \leadsto \text{Gauss} \leadsto \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es lin. dep.

$$B_U = \{(1, -2, -1, 3), (0, 2, 1, -1)\} \text{ y } \dim U = 2$$

Ecuaciones paramétricas

Como B_U es base, todos los elementos de U son combinación lineal de los de B_U : si tomamos $(x, y, z, t) \in U$,

$$(x, y, z, t) = \lambda \cdot (1, -2, -1, 3) + \mu \cdot (0, 2, 1, -1)$$

Forma vectorial

$$\begin{cases} x = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ y = (-2) \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \\ z = (-1) \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \\ t = 3 \cdot \lambda + (-1) \cdot \mu \end{cases}$$

$$u: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda + 2\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 3\lambda - \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Forma paramétrica

Resuelve como si x, y, z, t fueran números y λ, μ las

Ecuaciones implícitas

Si elegimos $(x, y, z, t) \in u$, deben de **incógnitas** existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla el sistema de las ecuaciones paramétricas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$\xrightarrow{\text{Gauss}}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & -y+2z \\ 0 & 0 & -4x+y+2t \end{array} \right)$$

Deben de ser cero

Para que sea compatible

Vectores de la base

$$u: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 4x - y - 2t = 0 \end{cases}$$

Subespacio suma y subespacio intersección

Definición (Suma e intersección de subespacios)

Sea V un K -e.v y sean u_1, u_2 subespacios de V . Definimos:

- La suma de u_1 y u_2 . Todas las posibles sumas de un vector de u_1 y otro de u_2 .

$$u_1 + u_2 = \{ u_1 + u_2 : u_1 \in u_1, u_2 \in u_2 \}$$

- La intersección de u_1 y u_2 : Vectores que tienen en común u_1 y u_2 .

$$u_1 \cap u_2 = \{ v \in V : v \in u_1 \text{ y } v \in u_2 \}$$

Proposición

En términos de la definición anterior,

$$U_1 + U_2 \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2$$

son subespacios de V .

DEM.

$U_1 + U_2$ (i) $U_1 + U_2 \neq \emptyset$ porque $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$ por ser subespacios $\Rightarrow \exists u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ ✓

(ii) Tomamos $u, u' \in U_1 + U_2$

$$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists u_1 \in U_1 \text{ y } u_2 \in U_2 \text{ con } u = u_1 + u_2$$

$$u' \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists u'_1 \in U_1 \text{ y } u'_2 \in U_2 \text{ con } u' = u'_1 + u'_2$$

$$u + u' = u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 = \underbrace{(u_1 + u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u'_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \quad \checkmark$$

(iii) Tomamos $u \in U_1 + U_2$, $\lambda \in K$

$$\lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \quad \checkmark$$

$U_1 + U_2$ es subespacio de V

$U_1 \cap U_2$

(i) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ porque como U_1 y U_2 son subespacios, seguimos que $0 \in U_1$ y $0 \in U_2 \Rightarrow 0 \in U_1 \cap U_2$ ✓

(ii) Tomamos $u, u' \in U_1 \cap U_2$ $\swarrow$ U_1 subesp.

$$\text{Por un lado, } u, u' \in U_1 \Rightarrow u + u' \in U_1;$$

$$\text{por otro, } u, u' \in U_2 \Rightarrow u + u' \in U_2 \quad \nwarrow \text{ } U_2 \text{ subesp.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u + u' \in U_1 \\ u + u' \in U_2 \end{array} \right\} \Rightarrow u + u' \in U_1 \cap U_2 \quad \checkmark$$

(iii) Tomamos $u \in U_1 \cap U_2$ y $\lambda \in K$.

$$u \in U_1, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U_1$$

$$u \in U_2, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda u \in U_1 \\ \lambda u \in U_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda u \in U_1 \cap U_2 \quad \checkmark$$

$U_1 \cap U_2$ es subespacio de V

Ejemplo Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por:

$$U_1: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda + \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ t = 3\lambda \\ w = 4\mu \end{cases} \quad U_2: \begin{cases} x = 3\alpha - 2\beta \\ y = -\alpha - 4\beta \\ z = 2\alpha + 2\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ t = \alpha - 6\beta \\ w = 5\alpha \end{cases}$$

Halla base, dimensión y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U_1 + U_2$ y de $U_1 \cap U_2$.

De las ecuaciones paramétricas de U_1 y U_2 , podemos obtener directamente:

$$B_{U_1} = \{(1, 2, -1, 3, 0), (2, 1, 1, 0, 4)\}$$

$$B_{U_2} = \{(3, -1, 2, 1, 5), (-2, -4, 2, -6, 0)\}$$

$U_1 + U_2$ Recordemos la definición:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Como tenemos bases de U_1 y U_2 , los elementos de $U_1 + U_2$ se pueden escribir como:

$$u_1 + u_2 = \lambda(1, 2, -1, 3, 0) + \mu(2, 1, 1, 0, 4) + \alpha(3, -1, 2, 1, 5) + \beta(-2, -4, 2, -6, 0)$$

Generadores de $U_1 + U_2$

Base y dimensión

Eliminamos generadores lin. dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑

$$B_{U_1 + U_2} = \{(1, 2, -1, 3, 0), (2, 1, 1, 0, 4), (3, -1, 2, 1, 5)\}$$

$$\dim(U_1 + U_2) = 3$$

Ecuaciones paramétricas

$$u_1 + u_2: \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ y = 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ z = -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \\ t = 3\lambda_1 + \lambda_3 \\ w = 4\lambda_2 + 5\lambda_3 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones implícitas

Resolvemos el sistema anterior como si las incógnitas fueran λ_1, λ_2 y λ_3 e imponemos que sea compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 2 & z \\ 3 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & 5 & w \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -3 & -7 & -2x+y \\ 0 & 0 & -2 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -2x+y+3z+t \\ 0 & 0 & 0 & -3x-5y-13z+6w \\ \hline & & & 6 \end{array} \right)$$

Para que sea compatible,

$$u_1 + u_2: \begin{cases} -2x + y + 3z + t = 0 \\ -3x - 5y - 13z + 6w = 0 \end{cases}$$

De las paramétricas de u_1 , podemos hallar las implícitas, resolviendo el sistema para λ, μ :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \\ 0 & 4 & w \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 0 & x-2y+t \\ 0 & 0 & -8x+4y+3w \\ \hline & & 3 \end{array} \right)$$

Imponemos que el sistema sea compatible:

$$u_1: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ -8x + 4y + 3w = 0 \end{cases} \quad u_2: \begin{cases} -3x + 5y + 7z = 0 \\ -5x - 8y + 7t = 0 \\ -10x + 5y + 7w = 0 \end{cases}$$

Haciendo lo mismo con u_2 , ↗

$U_1 \cap U_2$ Los elementos de U_1 cumplen las ecuaciones de U_1 ; y los de U_2 , las de U_2 . Así, los de $U_1 \cap U_2$, deben cumplir todas:

Ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ -8x + 4y + 3w = 0 \\ -3x + 5y + 7z = 0 \\ -5x - 8y + 7t = 0 \\ -10x + 5y + 7w = 0 \end{cases}$$

Pero aquí seguimos que "sobran" ecuaciones. Para eliminar las redundantes, usamos Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & 7 & 0 \\ -10 & 5 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasándolos a forma algebraica:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ 12z - 4t + 3w = 0 \\ 3/2 w = 0 \end{cases} \rightarrow U_1 \cap U_2: \begin{cases} -x + y + z = 0 & \text{(I)} \\ -y + z + t = 0 & \text{(II)} \\ 3z - t = 0 & \text{(III)} \\ w = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$



Ecuaciones paramétricas

Basta resolver el sistema anterior, que ya es escalonado

$$\text{(IV)} \rightarrow w = 0$$

$$\text{(III)} \rightarrow -y + z + 3z = 0 \rightarrow 4z = y$$

$$\text{(II)} \rightarrow -x + 4z + z = 0 \rightarrow 5z = x$$

$$U_1 \cap U_2: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \\ t = 3\lambda \\ w = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Base y dimensión

De las paramétricas,

$$B_{U_1 \cap U_2} = \{(5, 4, 1, 3, 0)\} \quad \text{y} \quad \dim(U_1 \cap U_2) = 1$$

Ejemplo Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$U_1: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x - 2y + 5t = 0 \end{cases} \quad U_2: \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -5x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Hallar base, dimensión y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U_1 + U_2$ y de $U_1 \cap U_2$.

$U_1 \cap U_2$ Los vectores de U_1 son los que cumplen sus ecuaciones implícitas y lo mismo pasa con los de U_2 . Para que estén en ambos, se deben de cumplir todas.

Ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x - 2y + 5t = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ -5x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Pero es posible que "sobren" ecuaciones. Para eliminar las redundantes, usamos eliminación gaussiana.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Gauss} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasando a la forma algebraica,

$$U_1 \cap U_2: \begin{cases} -x + y + z = 0 & (I) \\ -3y - 2 + 5t = 0 & (II) \\ z + t = 0 & (III) \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

Resolvemos el sistema anterior:

$$(III) \rightarrow z = -t$$

$$(II) \rightarrow -3y - (-t) + 5t = 0 \rightarrow -3y + 6t = 0 \rightarrow y = 2t$$

$$(I) \rightarrow -x + 2t - t = 0 \rightarrow -x + t = 0 \rightarrow x = t$$

$$u_1 \cap u_2: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \\ t = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Base y dimensión

$$B_{u_1 \cap u_2} = \{(1, 2, -1, 1)\} \quad \dim(u_1 \cap u_2) = 1$$

$u_1 + u_2$

Recordemos la definición:

Si hallamos bases de u_1 y u_2 , sabremos escribir esto como

$$u_1 + u_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in u_1, u_2 \in u_2\} \text{ comb. lin. de sus}$$

Hallamos primero bases de u_1 y u_2 , a partir de los elementos.

de las ecuaciones implícitas que nos dan.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2 - P_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 2 = 0 & \rightarrow -x + y - 3y + 5t = 0 \rightarrow -2y + 5t = x \\ -3y - 2 + 5t = 0 & \rightarrow -3y + 5t = 2 \end{cases}$$

$$u_1: \begin{cases} x = -2\lambda + 5\mu \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda + 5\mu \\ t = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightsquigarrow B_{u_1} = \{(-2, 1, -3, 0), (5, 0, 5, 1)\}$$

$\hookrightarrow u_1 = \lambda(-2, 1, -3, 0) + \mu(5, 0, 5, 1)$

$$\text{Haciendo lo mismo con } u_2 \rightsquigarrow B_{u_2} = \{(2, 5, 0, 0), (1, 0, -5, 5)\}$$

$$\hookrightarrow u_2 = \alpha(2, 5, 0, 0) + \beta(1, 0, -5, 5)$$

Podemos decir que los generadores de $U_1 + U_2$ son:

$$U_1 + U_2 = \langle (-2, 1, -3, 0), (5, 0, 5, 1), (2, 5, 0, 0), (1, 0, -5, 5) \rangle$$

Base y dimensión

Para hallar una base, eliminamos generadores que sean lin. dependientes

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{U_1 + U_2} = \{(-2, 1, 3, 0), (5, 0, 5, 1), (2, 5, 0, 0)\}$$

$$\dim(U_1 + U_2) = 3$$

Ecuaciones paramétricas

A partir de la base, son inmediatas:

$$U_1 + U_2: \begin{cases} x = -2\lambda + 5\mu + 2\alpha \\ y = \lambda + 5\alpha \\ z = 3\lambda + 5\mu \\ t = \mu \end{cases}, \lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones implícitas

Resolvemos el sistema anterior tomando como incógnitas los parámetros λ, μ, α :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 2 & x \\ 1 & 0 & 5 & y \\ 3 & 5 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 2 & x \\ 0 & 5 & 12 & x+2y \\ 0 & 0 & 3 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -5x+2y+4z+5t \end{array} \right)$$

Para que el sistema tenga solución,

$$U_1 + U_2: -5x + 2y + 4z + 5t = 0$$

¿Cuándo un subespacio es el espacio entero?

Sea V un K -e.v. y U un subespacio de V . ¿Qué condiciones debe satisfacer U para que $U=V$?

Proposición

Si V es un K -e.v. de dimensión finita y U es subespacio de V ,

$$U=V \iff \dim U = \dim V$$

DEM.

$\Rightarrow$ Si $U=V$, claramente $\dim U = \dim V$ ✓

$\Leftarrow$ Como U es subespacio de V , una base de U será un subconjunto lin. indep. de elementos de V . Llamando

$$\dim U = n = \dim V,$$

si $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ es base de U , son n vectores lin. indep. de V y, por tanto, es base de V , de modo que

$$v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in U \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V \subseteq U \\ U \subseteq V \end{array} \right\} \Rightarrow U=V \checkmark$$

y como U es subespacio,

Si un subespacio de un espacio de dimensión finita, V , tiene la misma dimensión que V , es que es todo V

Esto no ocurre en dimensión infinita. Por ejemplo, si tomamos V como el $\mathbb{R}$ -e.v. de todos los polinomios con coeficientes reales,

$$V = \mathbb{R}[x],$$

una base de V es

$$B_V = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \quad \text{y} \quad \dim V = \aleph_0$$

"Aleph-0", el cardinal de $\mathbb{N}$.

Consideremos ahora el subespacio de V :

$$U = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) \text{ es múltiplo de } x \}$$

$$p(x) = x \cdot q(x)$$

para algún $q(x)$

$$\Rightarrow p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ que queramos.

Una base de U es:

$$B_U = \{ x, x^2, x^3, x^4, \dots \} \quad \text{y} \quad \dim U = \aleph_0$$

Así, $\dim V = \dim U$, pero $U \neq V$, porque en U faltan las constantes. $p(x) = 5$ está en V , pero no en U .

La fórmula de Grassmann

Teorema (Fórmula de Grassmann)

Sea V un K -e.v. de dimensión finita y sean $U_1, U_2 \subseteq V$ dos subespacios. Entonces,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2)$$

DEM

Supongamos que

$$B_{U_1 \cap U_2} = \{u_1, \dots, u_p\} \leftarrow \dim (U_1 \cap U_2) = p$$

Como $U_1 \cap U_2$ es un subespacio tanto de U_1 como de U_2 , por el Lema de Intercambio de Steinitz, podemos sustituir p vectores de bases de U_1 y U_2 por los $u_1, \dots, u_p$, de modo que tendríamos:

$$B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} \leftarrow \dim U_1 = p + q$$

$$B_{U_2} = \{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\} \leftarrow \dim U_2 = p + r$$

Para probar que

$$\overbrace{\dim U_1}^{p+q} + \overbrace{\dim U_2}^{p+r} = \dim (U_1 + U_2) + \overbrace{\dim (U_1 \cap U_2)}^p$$

basta probar que

$$\dim (U_1 + U_2) = p + q + r$$

De hecho, vamos a ver que

$$B_{U_1 + U_2} = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r\}$$

Generadores

Si tomamos

$$u \in U_1 + U_2$$

$U_1 + U_2$ con $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

$$\begin{aligned} u &= \underbrace{u_1}_{U_1} + \underbrace{u_2}_{U_2} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q + \\ &\quad + \lambda'_1 u_1 + \dots + \lambda'_p u_p + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r \end{aligned}$$

$$= (\lambda_1 + \lambda'_1) u_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda'_p) u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$$

$B_{u_1+u_2}$ son generadores ✓

Independencia lineal

Usamos la def. de independencia lineal:

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p}_{\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i} + \underbrace{\mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q}_{\sum_{i=1}^q \mu_i v_i} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r}_{\sum_{i=1}^r \alpha_i w_i} = 0$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^q \mu_i v_i}_{u_2} = - \underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i w_i}_{u_2}$$

El vector v está en u_1 y en $u_2 \Rightarrow v \in u_1 \cap u_2$

$$v = \sum_{i=1}^p \beta_i u_i$$

comb. lin. de los u_i y w_i igualada a 0

$$\sum_{i=1}^p \beta_i u_i = - \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^p \beta_i u_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i = 0$$

Pero $\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r\} = B_{u_2}$, ¡son independientes!

$$\Rightarrow \beta_i = 0 = \alpha_i$$

Substituyendo, tenemos que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^q \mu_i v_i = 0$$

pero $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\} = B_{u_1}$, ¡son independientes!

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 = \mu_i$$

Todos los coeficientes son 0 y se da la independencia.

$\Rightarrow B_{U_1+U_2}$ son lin. indep. ✓

Conclusión

$$\dim(U_1+U_2) = p+q+r = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

y despejando,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) \quad \checkmark$$

Propiedades de la dimensión de subespacios

En esta sección V será un K -e.v. de dimensión finita, n , y U_1, U_2 serán subespacios vectoriales de V .

Proposición

- (i) U_1 y U_2 son ambos subespacios de U_1+U_2 .
- (ii) $U_1 \cap U_2$ es subespacio tanto de U_1 como de U_2 .

DEM.

Sabemos que si U_1 y U_2 son subespacios, $U_1 \cap U_2$ y U_1+U_2 , también lo son. Lo único que hay que comprobar son los contenidos como subconjuntos.

(i) Recordemos que

$$U_1+U_2 = \{u_1+u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Hay que ver que $U_1 \subseteq U_1+U_2$. Dado $u_1 \in U_1$, como $0 \in U_2$, tenemos

$$u_1 = \underbrace{u_1}_U + \underbrace{0}_{U_2} \in U_1+U_2 \Rightarrow U_1 \subseteq U_1+U_2 \quad \checkmark$$

Del mismo modo, $U_2 \subseteq U_1+U_2$.

(ii) Basta usar teoría de conjuntos básica:

$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 \subseteq U_2 \quad \checkmark$$

Corolario

de dimensión finita!

Dado V un K -e.v. y U_1, U_2 subespacios:

$$1) \dim V \geq \dim(U_1 + U_2) \geq \max \{ \dim U_1, \dim U_2 \}$$

$$2) 0 \leq \dim(U_1 \cap U_2) \leq \min \{ \dim U_1, \dim U_2 \}$$

Es trivial.

DEM

1) • Como $U_1 + U_2$ es subespacio de V ,

$$\dim V \geq \dim(U_1 + U_2) \checkmark$$

• Como U_1 es subespacio de $U_1 + U_2 \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \geq \dim U_1$
Como U_2 es subespacio de $U_1 + U_2 \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \geq \dim U_2$

$$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \geq \max \{ \dim U_1, \dim U_2 \} \checkmark$$

2) Como $U_1 \cap U_2$ es subespacio de $U_1 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim U_1$
Como $U_1 \cap U_2$ es subespacio de $U_2 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim U_2$

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \leq \min \{ \dim U_1, \dim U_2 \} \checkmark$$



La fórmula de Grassmann - Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. (Dos hiperplanos siempre se cortan)

Sea V un K -e.v. con $\dim V = n$, para n finito, $n \geq 1$.

Un subespacio de V , a saber U , se llama hiperplano si

$$\dim U = n - 1$$

Demostar que dos hiperplanos siempre se cortan y la dimensión de la intersección es mayor o igual que $n - 2$.

Sean U_1, U_2 dos hiperplanos de V ,

$$\dim U_1 = n - 1 = \dim U_2$$

Sabemos que $\dim(U_1 + U_2) \geq \max \{ \dim U_1, \dim U_2 \} = n - 1$

Utilizando la fórmula de Grassmann,

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

- Si $\dim(U_1 + U_2) = n \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = n - 2$
- Si $\dim(U_1 + U_2) = n - 1 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = n - 1$

En cualquier caso,

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq n - 2 \quad \checkmark$$

Ejercicio 2. (Dos subespacios "demasiado grandes" no se pueden cortar solo en el cero)

Sea V un K -e.v con $\dim V = n$, y sean U_1, U_2 subespacios que cumplen:

$$\dim U_1 + \dim U_2 > n.$$

Demostren que $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$

utilizamos la fórmula de Grassmann:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$$

de donde podemos escribir $\rightarrow n$

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \overbrace{\dim U_1 + \dim U_2}^{\rightarrow n} - \dim(U_1 + U_2)$$

Como sabemos que $\dim(U_1 + U_2) \leq n = \dim V$, en la expresión anterior restaremos, como mucho, n .

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > n - n > 0$$

$$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \{0\} \quad \checkmark$$

Suma directa de subespacios

Definición (suma directa)

Sea V un K -e.v. y U_1, U_2 subespacios. Si se dan estas dos condiciones.

$$(i) \quad V = U_1 + U_2$$

$$(ii) \quad U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

decimos que V es suma directa de U_1 y U_2 .

Proposición

Sea $V = U_1 \oplus U_2$. Entonces,

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2.$$

DEM

Utilizamos la fórmula de Grassmann:

$$\dim \underbrace{(U_1 + U_2)}_V + \dim \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\{0\}} = \dim U_1 + \dim U_2$$

$\dim \{0\} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dim V = \dim U_1 + \dim U_2 \quad \checkmark$$

Proposición

Sea $V = U_1 \oplus U_2$ y $v \in V$. Entonces, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ únicos, de forma que

$$v = u_1 + u_2$$



Si tenemos una suma directa, todos los vectores se escriben de forma única como suma de elementos de cada subespacio.

DEM

Como $V = U_1 \oplus U_2$, en particular, $V = U_1 + U_2$, con lo que, por definición del subespacio suma, todo $v \in V$ se escribe como

$$v = u_1 + u_2 \quad \text{con } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2.$$

Falta ver que la forma es única. Supongamos que se puede escribir de dos formas distintas al menos:

$$u_1 + u_2 = v = u'_1 + u'_2$$

$$\underbrace{u_1 - u'_1}_{\substack{\cap \\ U_1}} = \underbrace{u'_2 - u_2}_{\substack{\cap \\ U_2}}$$

Llamando $w = u_1 - u'_1 \in U_1$, pero también $w = u'_2 - u_2 \in U_2$; por lo que $w \in U_1 \cap U_2$. Pero como la suma es directa,

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow w = 0$$

$$u_1 - u'_1 = 0 \Rightarrow u_1 = u'_1$$

$$u'_2 - u_2 = 0 \Rightarrow u'_2 = u_2$$

¡Contradicción!

Por tanto, los vectores de $V = U_1 \oplus U_2$ se escriben de forma única como

$$v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$$

Corolario

Si $V = U_1 \oplus U_2$ y B_{U_1}, B_{U_2} son, respectivamente, bases de U_1 y de U_2 , entonces una base de V es

$$B_V = B_{U_1} \cup B_{U_2}.$$

DEM

Sean $B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_m\}$; $B_{U_2} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Queremos ver que

$$B_V = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\} \quad \text{es base de } V.$$

Como $V = U_1 \oplus U_2$, sabemos que dado $v \in V$, existen $w_1 \in U_1$ y $w_2 \in U_2$ con

$$v = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \quad \text{Comb. lin. de elem's de } B_{U_1} \cup B_{U_2}$$

$\Rightarrow B_V$ son generadores de V ✓

Falta ver que son lin. indeps:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^n \mu_j v_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i}_{U_1} = - \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j v_j}_{U_2}$$

Llamando $w = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in U_1$, pero también $w = - \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \in U_2$

$$\Rightarrow w \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow w = 0$$

$$\text{--- } V = U_1 \oplus U_2$$

$$\bullet w = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y } B_{U_1} = \{u_1, \dots, u_m\} \text{ lin. indep} \Rightarrow \lambda_i = 0$$

$$\bullet w = - \sum_{j=1}^n \mu_j v_j = 0 \quad \text{y } B_{U_2} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ lin. indep} \Rightarrow \mu_j = 0$$

$\Rightarrow B_V$ son lin indep ✓

Concluimos que $B_V = B_{U_1} \cup B_{U_2}$ es base de V .

Suma directa de subespacios - Sentido geométrico

Ejemplo. Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$U_1: \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$U_2 = \langle (2, -1, 3), (1, 1, 2) \rangle$$

Demuestran que $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ y dar una interpretación geométrica.

Comenzamos estudiando $U_1 + U_2$. Para ello buscamos bases de ambas subespacios.

U_1 Resolviendo el sistema que lo define, llegamos a:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow B_{U_1} = \{(1, 2, -1)\}$$

U_2 Los generadores son linealmente independientes, por lo que

$$B_{U_2} = \{(2, -1, 3), (1, 1, 2)\}$$

$U_1 + U_2$ Recordemos que los elementos de $U_1 + U_2$ son de la forma $u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$.

$$U_1 + U_2 = \langle (1, 2, -1), (2, -1, 3), (1, 1, 2) \rangle$$

Pero es fácil ver que son lin. independientes, así que,

$$B_{U_1 + U_2} = \{(1, 2, -1), (2, -1, 3), (1, 1, 2)\}$$

$$\text{y } \dim(U_1 + U_2) = 3$$

Como $U_1 + U_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ^{dim 3} que tiene dim. 3,

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$$

Para ver que la suma es directa falta ver que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
usando la fórmula de Grassmann:

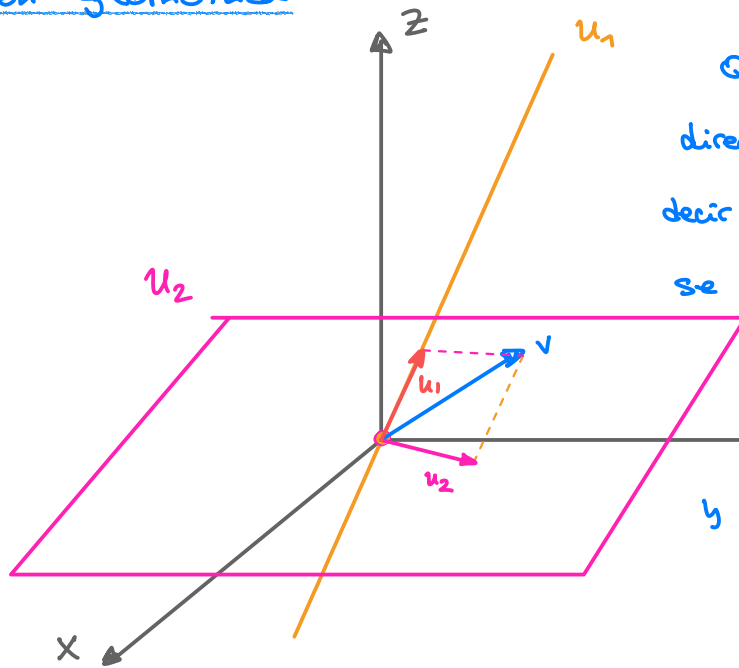
$$\underbrace{\dim U_1}_1 + \underbrace{\dim U_2}_2 = \underbrace{\dim (U_1 + U_2)}_3 + \underbrace{\dim (U_1 \cap U_2)}_0$$

$$\text{y } \dim(U_1 \cap U_2) = 0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Así,

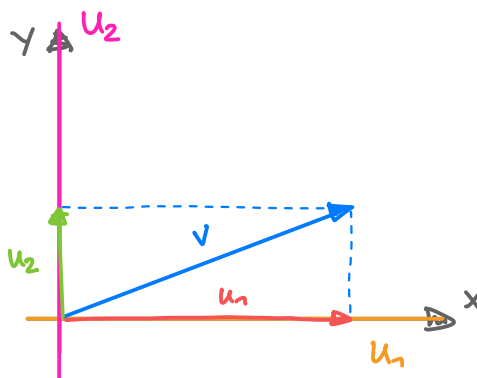
$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \quad \checkmark$$

Interpretación geométrica



Que $\mathbb{R}^3$ sea suma directa de U_1 y U_2 , quiere decir que cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se escribe de forma única como un vector de U_1 y un vector de U_2

La suma directa permite hacer "descomposición" de vectores en subespacios. Pensemos a como hacemos con los ejes cartesianos en $\mathbb{R}^2$:



LA SUMA DIRECTA GENERALIZA ESTA IDEA A CUALQUIER ESPACIO VECTORIAL. ^^

Proyección sobre un subespacio

Sea V un K -e.v. y sean U_1, U_2 subespacios con

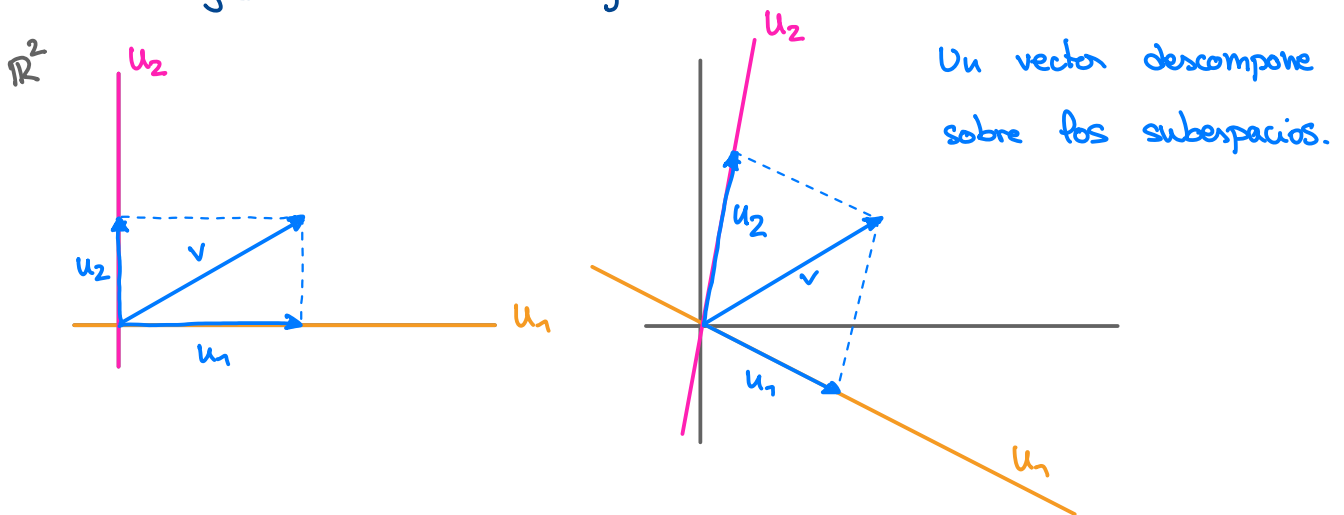
$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Sabemos que dado $v \in V$, podemos escribir de forma única

$$v = u_1 + u_2, \text{ donde } u_1 \in U_1 \text{ y } u_2 \in U_2.$$

A u_1 lo llamamos proyección de v sobre U_1 en la dirección de U_2 ; y a u_2 , proyección de v sobre U_2 en la dirección de U_1 .

La idea geométrica es la siguiente:



Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios

$$U_1 = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

$$U_2 = \langle (0, 1, -1), (-1, 1, 1) \rangle$$

a) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$

Como vienen dados por generadores,

$$U_1 + U_2 = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1), (-1, 1, 1) \rangle$$

Es fácil ver que los tres vectores son linealmente independientes, por lo que

$$\dim(U_1 + U_2) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \checkmark$$

$U_1 + U_2$ es un subesp. de dim 3

dentro de un esp. de dim 3 también

Usando la fórmula de Grassmann:

$$\underbrace{\dim U_1}_1 + \underbrace{\dim U_2}_2 = \underbrace{\dim(U_1 + U_2)}_3 + \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\} \checkmark$$

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2}$$

b) Dado $v = (1, 1, 1)$, hallar su proyección sobre U_2 en la dirección de U_1 .

Escribimos

$$(1, 1, 1) = \underbrace{\lambda_1 (1, 0, -1)}_{U_1} + \underbrace{\lambda_2 (0, 1, -1) + \lambda_3 (-1, 1, 1)}_{U_2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad \leadsto \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 3$$

El sumando correspondiente a u_2 es:

$$u_2 = -2 \cdot (0, 1, -1) + 3 \cdot (-1, 1, 1) = (-3, 1, 5)$$

c) Generaliza el apartado anterior para un vector cualquiera $v = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2x + y + z \\ \lambda_2 &= -x - z \\ \lambda_3 &= x + y + z \end{aligned}$$

El sumando correspondiente a u_2 es:

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= (-x - z) \cdot (0, 1, -1) + (x + y + z) \cdot (-1, 1, 1) \\ &= (-x - y - z, \quad y, \quad 2x + y + 2z) \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \quad u_2(x, y, z) = (-x - y - z, \quad y, \quad 2x + y + 2z)$$

Esta expresión nos da la proyección sobre u_2 en la dirección de u_1 de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$.

Podemos decir que u_2 es una aplicación

$$u_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow u_2$$

Obs: Esta aplicación la podemos poner como una matriz, simplemente reescribiendo la expresión $\textcircled{*}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - y - z \\ y \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos da toda la información que necesitamos para calcular la proyección. Por ejemplo, para $v = (1, 1, 1)$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Subespacio de matrices simétricas - Ejercicio resuelto

Ejercicio. En $M_n(\mathbb{R})$ consideramos el siguiente subconjunto:

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} \quad \text{Matriz simétrica}$$

a) Demostren que es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$.

(i) $\text{Sym}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ porque la matriz nula, $0 \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Sean $A, B \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$. ¿ $A+B \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$?

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B \Rightarrow A+B \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$$

(iii) Sean $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿ $\lambda A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$?

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$$

$\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$

b) Hallar una base y la dimensión de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Llamemos $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ a la matriz que tiene todos ceros, salvo un 1 en la posición (i,j) . Por ejemplo, en $M_3(\mathbb{R})$,

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & & j \end{matrix}$$

Vamos a escribir una base de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ usando E_{ij} 's. Para fijar ideas, veamos qué ocurre en $\text{Sym}_3(\mathbb{R})$. Hay dos tipos de matrices simétricas:

- Las que tienen un 1 en la diagonal:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, en $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ están $E_{11}, \dots, E_{nn}$.

- Las que tienen 1 fuera de la diagonal:

$$\begin{matrix} & & (1,2) \\ (2,1) & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\ & E_{12} + E_{21} & \end{matrix}$$

i, j

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{13} + E_{31}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_{23} + E_{32}$

i va de 1 a $n-1$ j va de $i+1$ a n

En general, en $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ tendremos las matrices

$$E_{ij} + E_{ji} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n-1; \quad j = i+1, \dots, n.$$

Afirmamos, de hecho que

$$\mathcal{B}_{\text{Sym}_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^n \{E_{ii}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{E_{ij} + E_{ji}\}$$

es una base de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$. Vamos a probarlo:

Generadores

Dada $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ con entradas a_{ij} , que cumplen que

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \leftarrow \text{Esto es, que } A \text{ es simétrica}$$

podemos escribir

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot E_{ii}}_{\text{Elementos de la diagonal}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})}_{\text{Elem's fuera de la diagonal}} \quad \checkmark$$

Ejemplo en $\text{Sym}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 2 \cdot E_{22} + 0 \cdot E_{33} \\ + (-1) \cdot (E_{12} + E_{21}) + 3(E_{13} + E_{31}) + \\ + 5 \cdot (E_{23} + E_{32})$$

Independencia lineal

Si escribimos la matriz nula,

$$0 = \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}),$$

necesariamente los $a_{ii} = 0$ y los $a_{ij} = 0$

Afirmamos así que

$$\mathcal{B}_{\text{Sym}_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^n \{E_{ii}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{E_{ij} + E_{ji}\}$$

es base de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Dimensión

¿Cuántos elementos hay en $\mathcal{B}_{\text{Sym}_n(\mathbb{R})}$?

- Hay tantas E_{ii} como elementos en la diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ | & | & \ddots & | \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hay n elementos

- Hay tantos $\{E_{ij} + E_{ji}\}$ como elementos hay bajo la diagonal.

En toda la matriz $\rightarrow n^2$

Quitando la diagonal $\rightarrow n^2 - n$

Hay $\frac{n^2 - n}{2}$ elementos

Sumando,

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2 + n}{2}$$

Subespacio de matrices antisimétricas - Ejercicio resuelto

Ejercicio. En $M_n(\mathbb{R})$ consideramos el siguiente subconjunto:

$$\text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\} \quad \text{Matrices antisimétricas}$$

a) Demostren que es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$.

(i) $\text{Skew}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ porque la matriz nula, $0 \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$

(ii) Sean $A, B \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$. ¿ $A+B \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$?

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

(iii) Sean $A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿ $\lambda A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$?

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

$\text{Skew}_n(\mathbb{R})$ es subespacio de $M_n(\mathbb{R})$

b) Halla una base y la dimensión de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$.

Llamemos $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ a la matriz que tiene todos ceros, salvo un 1 en la posición (i,j) . Por ejemplo, en $M_3(\mathbb{R})$,

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a escribir una base de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$ usando E_{ij} 's. Para fijar ideas, veamos qué ocurre en $\text{Skew}_3(\mathbb{R})$.

• Necesariamente, los elementos de la diagonal deben de ser 0, porque al transponer la matriz, no cambian de posición, pero sí de signo.

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Las matrices que tienen 1 fuera de la diagonal:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} (2,1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{12} - E_{21} \end{array} & \begin{array}{c} (1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{13} - E_{31} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{23} - E_{32} \end{array} \\
 i, j & i \text{ va de } 1 \text{ a } n-1 & j \text{ va de } i+1 \text{ a } n
 \end{array}$$

En general, en $\text{skew}_n(\mathbb{R})$ tendremos las matrices

$$E_{ij} - E_{ji} \quad \text{para } i=1, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n.$$

Afirmamos, de hecho, que

$$\mathcal{B}_{\text{Skew}_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{E_{ij} - E_{ji}\}$$

es base de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$.

Generadores

Dada $A \in \text{Skew}_n(\mathbb{R})$ con entradas a_{ij} que cumplen

$$a_{ii} = 0 \quad \text{si } i=1, \dots, n; \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{si } i \neq j$$

Esto es, A antisimétrica.

Podemos escribir

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) \quad \checkmark$$

Ejemplo en $\text{Skew}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (E_{12} - E_{21}) + 2 \cdot (E_{13} - E_{31}) + (-3) \cdot (E_{23} - E_{32})$$

Independencia lineal

Si escribimos la matriz nula,

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}),$$

necesariamente los $a_{ij} = 0$

Afirmamos así que

$$\mathcal{B}_{\text{Skew}_n(\mathbb{R})} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^n \{E_{ij} - E_{ji}\}$$

es una base de $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$.

Dimensión

¿Cuántos elementos hay en $\mathcal{B}_{\text{Skew}_n(\mathbb{R})}$?

Hay tantos $\{E_{ij} - E_{ji}\}$ como elementos hay sobre la diagonal

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En toda la matriz hay n^2
Quitando la diagonal, hay $n^2 - n$
Sobre la diagonal hay

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

$$\dim(\text{Skew}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Suma directa de subespacios - Ejercicios resueltos

Ejercicio. En $M_n(\mathbb{R})$, consideramos los subespacios

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} \leftarrow \text{Matrices simétricas}$$

$$\text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\} \leftarrow \text{Matrices antisimétricas}$$

a) Demuestra que

$$M_n(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

En otros ejercicios ya vimos que $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ y $\text{Skew}_n(\mathbb{R})$ son subespacios de $M_n(\mathbb{R})$ y, de hecho, hallamos bases y las dimensiones

$$\dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R})) \stackrel{(I)}{=} \frac{n^2+n}{2} \quad \dim(\text{Skew}_n(\mathbb{R})) \stackrel{(II)}{=} \frac{n^2-n}{2}$$

Para ver que la suma es directa hay que probar:

$$(i) \quad M_n(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) + \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

$$(ii) \quad \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

(ii) Sea $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Skew}_n(\mathbb{R})$.

• Como A es antisimétrica, su diagonal debe de ser 0 (lo demostramos ya), esto es, $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

• Además, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ $\leftarrow$ si no estamos en la

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ simétrica} \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \\ A \text{ antisimétrica} \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a_{ji} = -a_{ij}}_{\text{Como } x = -x} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{diagonal.} \\ a_{ji} = 0 = a_{ij} \end{array}$$

• Todos los elem's de la diagonal son 0

• Todos los elem's de fuera de la diagonal son 0

Por tanto,

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{0\} \checkmark$$

(i) Por la fórmula de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R}) + \text{Skew}_n(\mathbb{R})) + \dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Skew}_n(\mathbb{R})) &= \\ &= \underbrace{\dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R}))}_{(I) \rightarrow \frac{n^2+n}{2}} + \underbrace{\dim(\text{Skew}_n(\mathbb{R}))}_{(II) \rightarrow \frac{n^2-n}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dim (\text{Sym}_n(\mathbb{R}) + \text{Skew}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R}) + \text{Skew}_n(\mathbb{R})$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$ con su misma dimensión.

$$\Rightarrow M_n(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) + \text{Skew}_n(\mathbb{R}) \checkmark$$

Concluimos que

$$M_n(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \text{Skew}_n(\mathbb{R})$$

b) ¿Cómo interpretamos este resultado?

Utilizamos una propiedad importante de la suma directa:

Sea $V = U_1 \oplus U_2$ y $v \in V$. Entonces, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ únicos, de forma que

$$v = u_1 + u_2$$

Dada cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, podemos escribirla de forma única como

$$A = S_1 + S_2,$$

donde S_1 es una matriz simétrica y S_2 , antisimétrica.

c) Escribir la siguiente matriz como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos sacando condiciones

$$\begin{cases} x + \alpha = 1 \\ x - \alpha = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \beta = -2 \\ y - \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + \gamma = 2 \\ z - \gamma = -1 \end{cases}$$

Resolviendo cada sistema,

$$x = 5/2$$

$$y = -1/2$$

$$z = 1/2$$

$$\alpha = -3/2$$

$$\beta = -3/2$$

$$\gamma = 3/2$$

En conclusión,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -1/2 \\ 5/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3 \end{pmatrix}}_{\substack{\mathfrak{m} \\ \text{Sym}_3(\mathbb{R})}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\mathfrak{m} \\ \text{Skew}_3(\mathbb{R})}}$$
