# Series numéricas

**Def** (Serie) Sea $(x_n)$ una sucesión (real). La suma parcial n-ésima asociada es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leftarrow x_1 + \_\_ + x_n$$

Las sumas parciales forman una sucesión en sí mismas, $(S_n)$, por lo que podemos estudiar su límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

TÉRMINO GENERAL DE LA SERIE

A este límite se le llama serie asociada a $(x_n)$.

Si el límite es un nº, lo llamamos suma de la serie y diremos que la serie converge; de lo contrario, decimos que la serie diverge.

**Obs:** Siempre podemos escribir la sucesión de las sumas parciales como:

$$S_{n+1} = \underbrace{x_1 + \_\_ + x_n}_{S_n} + x_{n+1} = S_n + x_{n+1}$$

## 1. Algunas series importantes

### Suma geométrica básica

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \underbrace{1 + x + x^2 + \_\_ + x^{n-1} + x^n}_{n+1 \text{ sum.}} = S_n$$

$$x \cdot S_n = \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \_\_ \cancel{\phantom{x}} + \cancel{x^n} + x^{n+1}$$

$$S_n = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{\phantom{x}} \_\_ + \cancel{x^{n-1}} + \cancel{x^n} \qquad \ominus$$

$$xS_n - S_n = x^{n+1} - 1$$

$$S_n(x-1) = x^{n+1} - 1 \xrightarrow{x \neq 1} S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$$

¿Y si $x = 1$? $S_n = n+1$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}^+, x \neq 1}$$

# Serie geométrica básica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

(*)(*) ¿$x=1$?

Suma geom. básica $(x \neq 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & |x|<1 \ (*) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & x>1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & |x|<1 \end{cases}$$

(*) Si $|x|<1$, $x^{n+1} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} \overset{\cdot(-1)}{=} \frac{1}{1-x}$$

(*)(*) Si $x=1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = n+1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \text{si } |x|<1}$$

# La serie armónica

Ej: Consideramos la sucesión definida por

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Demostrar que no es de Cauchy

RECORDEMOS

Def (Sucesión de Cauchy) Decimos que una sucesión $(x_n)$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, existe $\boxed{N \in \mathbb{N}}$ tal que

A partir de un punto en la sucesión

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m,n \geq N$$

Cualquier pareja de términos de la sucesión están a una distancia menor que un $\varepsilon>0$ prefijado.

Tenemos que ver que para cierto $\varepsilon$, pongamos $\varepsilon = 1$, para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tales que

$$|x_m - x_n| > 1.$$

(No se cumple la condición de Cauchy)

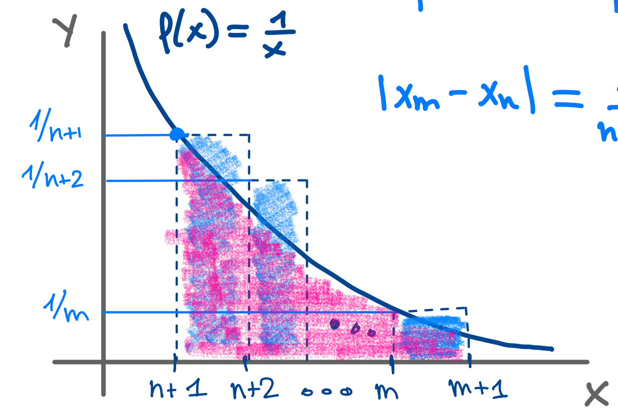
$$x_m - x_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}$$

Es positivo seguro

$$|x_m - x_n| = x_m - x_n$$

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$




$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m}$$

La suma de las áreas de los rectángulos será mayor o igual que el área ▩, que es una integral definida

NEPERIANO

$$\Rightarrow |x_m - x_n| \geq \int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_{n+1}^{m+1}$$

BARROW

$$= \log(m+1) - \log(n+1)$$

$m = n + p$

$p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$

$$= \log \frac{n+p+1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{p}{n+1}\right)$$

$$\rightarrow |x_m - x_n| \geq \underbrace{\log\left(1 + \frac{p}{n+1}\right) > 1}$$

$$1 + \frac{p}{n+1} > e \rightarrow \frac{p}{n+1} > e - 1 \rightarrow \boxed{p > (n+1)(e-1)}$$

(*)

Por tanto, para todo $N \in \mathbb{N}$, elegimos un $n \geq N$ fijo y tomando $m \geq n+p$, con $p \in \mathbb{N}$ que cumpla (*), aseguramos que

$$|x_m - x_n| > 1$$

Esto demuestra que la sucesión

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

no es de Cauchy, lo cual también nos dice que no converge en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty}$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ se le llama <u>serie armónica</u> y acabamos de probar que

$$\boxed{\text{La serie armónica es divergente}}$$

# La serie armónica alternada

Sabemos que la serie armónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge.}$$

Vamos a estudiar el carácter de la serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boxed{(-1)^{n+1}}}{n} \longleftarrow 1, -1, 1, -1, \dots$$

**Lema** (La constante de Euler-Mascheroni)(*)

La sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge y su límite, $\gamma$, se llama constante de E-M

(*) Para ver una demostración de este lema, consultar el anexo al final del tema

Llamamos

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

a las sumas parciales de la serie armónica alternada y

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{n}$$

a las de la serie armónica. Trabajamos con $S_{2n}$:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \_\_ + \frac{1}{2n}\right) \text{ y reagrupamos}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \_\_ + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_{H_{2n}}$$

$$- 2\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \_\_ + \frac{1}{2n}\right)}_{1 + \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{n} = H_n}$$

$$= H_{2n} - H_n$$

$$\boxed{S_{2n} = H_{2n} - H_n}$$

Utilizamos ahora la sucesión $(t_n)$ asociada a la constante de Euler-Mascheroni:

$$t_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}_{H_n} - \log n = H_n - \log n$$

Del mismo modo, $t_{2n} = H_{2n} - \log 2n$. Restando:

$$t_{2n} - t_n = H_{2n} - \log 2n - H_n + \log n$$

$$= \underbrace{H_{2n} - H_n}_{S_{2n}} + \underbrace{\log n - \log 2n}_{\log\left(\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}}\right)}$$

$$\Rightarrow t_{2n} - t_n = S_{2n} + \log\frac{1}{2} = S_{2n} - \log 2$$

$\log 2^{-1} = -\log 2$

Constante E-M

Hacemos ahora límites. A la izquierda

$$\lim_{n\to\infty} (t_{2n} - t_n) = \lim_{n\to\infty} t_{2n} - \lim_{n\to\infty} t_n = \gamma - \gamma = 0$$

A la derecha,

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - \log 2) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \log 2 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \log 2$$

Además, como

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{1}{2n+1} \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} - \overbrace{\frac{1}{2n+1}}^{0}\right) = \log 2$$

La subsucesión de los términos pares y los impares de $(S_n)$ convergen a $\log 2$. Falta ver que lo hace la propia $(S_n)$.

Fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ con

$$|S_{2n} - \log 2| < \varepsilon \quad \forall\, 2n \geq N_1; \qquad |S_{2n+1} - \log 2| < \varepsilon \quad \forall\, 2n+1 \geq N_2$$

$S_8\ S_{10}\ S_{12} \dots \rightarrow N_1 = 8$ $\qquad$ $S_{17}, S_{19}, S_{21}, \dots \rightarrow N_2 = 17$

Se cumple para $S_{17}, S_{18}, S_{19}, S_{20}, \dots$ $\quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

Llamando $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que

$$|S_n - \log 2| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

$S_n$ converge a $\log 2$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2}$$

## Series telescópicas

Una serie es **telescópica** si su término general puede expresarse mediante una diferencia de elementos consecutivos de una sucesión, de modo que al sumar, se eliminen muchos de ellos.

Ej: Estudiar la convergencia y la suma de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

Observamos que el término general puede escribirse como:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Se ve fácilmente escribiendo $\frac{1}{n(n-1)}$ en fracciones simples.

La serie que tenemos que estudiar es

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Para hacerlo, hallamos una expresión para las sumas parciales:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

Como la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Conclusión

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1}$$

---

La <u>idea</u> que hay detrás de las series telescópicas es escribir el término general de la serie, $x_n$, como diferencia de elementos de otra sucesión, es decir,

$$x_n = y_n - y_{n+1} \quad \text{o} \quad x_n = y_n - y_{n+2} \quad \text{o} \quad x_n = y_n - y_{n+p}$$

De esta forma, al hacer las sumas parciales habrá cancelaciones. En nuestro ejemplo anterior

$$\underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{x_n} = \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{y_{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{y_n}$$

Ej Estudiar la convergencia y la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Vamos a intentar escribirla como

Igualando numerad.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2}} = \frac{A(n+2) - Bn}{n(n+2)}$$

$$\rightarrow \quad 1 = An + 2A - Bn \quad \rightarrow \quad 0n + 1 = (A-B)n + 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B = 0 & \longrightarrow \quad B = A = 1/2 \\ 2A = 1 & \longrightarrow \quad A = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Tenemos que estudiar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Para ello, hallamos las sumas parciales:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\dots+\right.$$
$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$\rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

La suma de la serie es el límite de esta expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{0}\right] = \frac{3}{4}$$

Conclusión

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}}$$

---

Ej: Estudiar la convergencia y la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Como $\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log n - \log(n+1)$, basta estudiar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n - \log(n+1))$$

Las sumas parciales son:

$$S_n = (\underbrace{\log 1}_{0} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 2} - \cancel{\log 3}) + \dots + (\cancel{\log n} - \log(n+1))$$

$$\Rightarrow S_n = -\log(n+1)$$

Como la serie es el límite de las sumas parciales,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [-\log(n+1)] = -\infty$$

Conclusión: la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ diverge.}$$

---

**Ej:** Estudiar la convergencia y la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Idea 1: Escribir el término general en fracciones simples.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \longleftarrow y_n - y_{n+p}$$

son tres ✗

Problema: Debería quedar una diferencia de dos términos

Idea 2: Hacer una "reducción" a dos fracciones simples:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{B}{(n+1)(n+2)}$$

Denom. común $n(n+1)(n+2)$

$$= \frac{A\,\boxed{(n+2)}}{n(n+1)\boxed{(n+2)}} - \frac{B\,\boxed{n}}{\boxed{n}(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{A(n+2) - Bn}{n(n+1)(n+2)}$$

Igualando numeradores:

$$1 = An + 2A - Bn \longrightarrow 0n + 1 = (A-B)n + 2A$$

$$\begin{cases} A - B = 0 \longrightarrow B = A \longrightarrow B = 1/2 \\ 2A = 1 \longrightarrow A = 1/2 \end{cases}$$

Así,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Tenemos que estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Las sumas parciales son:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} - \cancel{\frac{1}{4\cdot 5}}\right) + \dots +\right.$$

$$+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\Big]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Como la suma de la serie es el límite de las sumas parciales,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{0}\right) = \frac{1}{4}$$

Conclusión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

---

## 2. Criterios de convergencia

Ej: Conocemos ya algunas series:

- Serie geométrica. Dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & |x|<1 \\ \text{Diverge}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

---

Hay dos cuestiones que estudiar, dada una serie:

- Su carácter de convergencia (si converge o diverge)
- Si converge, cuál es su suma. Solo esto ya es difícil..

## Proposición

Sea $M \in \mathbb{R}^+$, y sea $\sum x_n$ una serie de términos positivos

$$\sum x_n \text{ converge} \iff \sum M\cdot x_n \text{ converge}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Como $\sum x_n$ converge, la sucesión de las sumas parciales

$$S_n = x_1 + \ldots + x_n$$

converge, esto es, $\lim S_n = K \in \mathbb{R}^+$.

Consideramos ahora las sumas parciales de $\sum M x_n$:

$$\tilde{S}_n = Mx_1 + \ldots + Mx_n = M(x_1 + \ldots + x_n) = M \cdot S_n$$

Haciendo el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim_{n\to\infty} M\cdot S_n = M\cdot K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sum M x_n \text{ converge } \checkmark$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\sum M x_n \text{ converge} \Rightarrow \sum x_n \text{ converge}$$

Lo probamos usando el contrarrecíproco:

$$\sum x_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum M x_n \text{ diverge}$$

$$\lim S_n = +\infty \rightsquigarrow \lim \tilde{S}_n = \lim M S_n = M\cdot \lim S_n = +\infty \quad \checkmark$$

---

**Ej.** Estudiar el carácter de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{7}{4}}_{M} \cdot \frac{1}{n}$$

tiene el mismo carácter de convergencia que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge por ser la serie armónica.

---

Prop (Criterio básico de convergencia de series de términos positivos)

Dada una serie de términos positivos, $\sum x_n$, esto es, con $x_n > 0$ para todo $n$,

$$\sum x_n \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R} \text{ tal que } \underbrace{S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}}_{\text{Las sumas parciales están acotadas.}}$$

DEM:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\sum x_n$ converge quiere decir que el límite de la sucesión de las sumas parciales, $(S_n)$, es un nº real. Pero sabemos que toda sucesión convergente es acotada ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ Como la serie es de términos positivos, $(S_n)$ es una sucesión creciente, ya que

$$S_n = x_1 + \ldots + x_n \underset{x_{n+1}>0}{\leq} x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = S_{n+1}$$

Así que $(S_n)$ es monótona y acotada ✓ y, por tanto, converge. ■

Obs: Si una serie de términos positivos no es convergente, es que no está acotada superiormente y, por tanto, diverge a $+\infty$

Ej: La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.

---

# Criterio de comparación de series

Teorema (Criterio de comparación)

Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ dos sucesiones con $0 \leq x_n \leq y_n$ para $n$ lo suficientemente grande. Entonces:

(i) $\sum y_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum x_n$ converge

(ii) $\sum x_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum y_n$ diverge

Obs: Como $x_n \geq 0$,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_n\right| = \sum_{k=m+1}^{n} |x_n| = \sum_{k=m+1}^{n} x_n$$

e igual ocurre con $(y_n)$.

$\boxed{\text{DEM}}$

(i) Supongamos que $\sum y_n$ converge. Dado $\varepsilon > 0$, como $\sum y_n$ cumple el criterio de convergencia de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{n} y_k < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N$$

Pero como $x_n \leq y_n$ para $n$ suf. grande, a saber, $\forall n \geq N'$, tomando $N_0 = \max\{N, N'\}$, tendremos que

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k \leq \sum_{k=m+1}^{n} y_k < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq N_0$$

Condición de Cauchy para $\sum x_n$

$\Rightarrow \sum x_n$ converge ✓

(ii) Aplicando el contrarrecíproco a (i) ✓ ■

Ej Estudiar el carácter de convergencia de estas series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$

$x_n$ $\qquad$ $y_n$

$$2^n + n \geq 2^n \longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge porque es la serie geométrica de razón $x = 1/2$, por el criterio de comparación, la serie original converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$n \cdot n \geq n \cdot (n-1) \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{x_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{y_n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ converge porque lo probamos (es telescópica); por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2-1} = +\infty \neq 0 \Rightarrow$$

¡No se cumple la condición necesaria para la convergencia!

Diverge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

$0 \leq \frac{1}{n^2+5} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ converge

---

# Convergencia de las p-series

Queremos estudiar, dado $p \in \mathbb{R}^+$, la convergencia de la p-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Si $p=1$, es la serie armónica, que sabemos que diverge.

- Caso 1: $p<1$

$$n^p \leq n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{y_n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge si } p \leq 1}$$

- **Caso 2:** $p > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \boxed{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}} + \boxed{\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}} + \frac{1}{8^p} + \dots$$

$$2^p \leq 3^p \Rightarrow \frac{1}{2^p} \geq \frac{1}{3^p} \xRightarrow{+\frac{1}{2^p}} \frac{2}{2^p} \geq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4^p \leq 5^p \Rightarrow \frac{1}{4^p} \geq \frac{1}{5^p} \\ 4^p \leq 6^p \Rightarrow \frac{1}{4^p} \geq \frac{1}{6^p} \\ 4^p \leq 7^p \Rightarrow \frac{1}{4^p} \geq \frac{1}{7^p} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4^p} \geq \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}$$

$$\Downarrow + \frac{1}{4^p}$$

$$\frac{4}{4^p} \geq \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \leq \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{(2^2)^{p-1}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

Repitiendo este argumento, tendremos acotado cada bloque de la forma

$$\frac{1}{(2^k)^p} + \frac{1}{(2^k+1)^p} + \text{——} + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^p} \overset{(*)}{\leq} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

(se puede demostrar cuidadosamente haciendo inducción en $k$)

Como la serie es de términos positivos, para todo $n$, las sumas parciales cumplen que

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^p},$$

en particular $S_n \leq S_{n+1}$, lo que nos dice que si $S_{n+1}$ está acotada, $S_n$ también lo está.

Consideramos

$$S_{2^{k+1}-1} = \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^p} \overset{*}{\leq} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^0 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

Tiene $k$ bloques de sumas de fracciones que empiezan por $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{(2^2)^p}, \dots, \frac{1}{(2^k)^p}$

$2^0$ $2^1$

$$= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n \leq \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n}$$

Serie geométrica con $x = 1/2^{p-1} < 1$

$$= \frac{1}{1-2^{1-p}}$$

$\frac{1}{2^{p-1}} = 2^{1-p}$

$$\Rightarrow S_{2^{k+1}-1} \leq \frac{1}{1-2^{1-p}}$$

Es una constante porque $p$ es un nº fijo

Esto nos dice que la sucesión de sumas parciales, que es creciente, está acotada superiormente, por lo que converge.
Como la serie es el límite de esta sucesión,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge para } p > 1}$$

**p-Serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{Diverge si } 0 < p \leq 1 \\ \text{Converge si } p > 1 \end{cases}$$

# Convergencia absoluta y condicional

**Def** (Convergencia absoluta y condicional)

Sea $\sum x_n$ una serie. Decimos que:

- Converge absolutamente si $\sum |x_n|$ converge
- Converge condicionalmente si $\sum |x_n|$ no converge, pero $\sum x_n$, sí.

Ej:

- La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente

$$\sum \left|\frac{1}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge } \quad (2\text{-serie})$$

- La serie $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} \text{ diverge (armónica), pero}$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2 \text{ converge (armónica alternada).}$$

---

**Proposición** Sea $\sum x_n$ una serie.

$$\underbrace{\sum x_n \text{ converge absolutamente}}_{\sum |x_n| \text{ converge}} \Rightarrow \sum x_n \text{ converge}$$

**DEM**

Veamos que $\sum x_n$ cumple la condición de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, como $\sum |x_n|$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ con

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \overset{D.T}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \quad \forall\, n > m \geq N$$

Condición de Cauchy para $\sum x_n \Rightarrow \sum x_n$ converge

$\blacksquare$

Dada una serie $\sum x_n$, si vemos que $\sum |x_n|$ converge, automáticamente tenemos la convergencia de $\sum x_n$.

Ej Estudiar la convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2}$$

Estudiamos la convergencia absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen } n|}{n^2} \text{ converge } \overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2} \text{ converge}$$

$$\frac{|\text{sen } n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Criterio de comparación

# Criterio de la raíz

**Criterio de la raíz**

Sea $(x_n)$ una sucesión y sea

Aseguramos la existencia de este lím

$$\alpha = \boxed{\overline{\lim}\text{ sup}}\, |x_n|^{1/n}. \qquad \sqrt[n]{|x_n|}$$

(i) Si $\alpha < 1 \Rightarrow \sum x_n$ converge absolutamente

(ii) Si $\alpha > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge

(iii) Si $\alpha = 1$, el criterio no nos da información

Las nociones de lim sup y lim inf las vimos en el tema de sucesiones. No obstante, vamos a recordar aquí lo fundamental para poder llevar a cabo la demostración del criterio.

## RECORDEMOS LIMSUP

Dada una sucesión $(x_n)$, para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo, definimos:

$$S_N = \sup\{x_n : n \geq N\}$$

supremo de toda la sucesión a partir de $x_N$

- Si $(x_n)$ es acotada superiormente –toda ella–, $(S_N)$ es una sucesión decreciente y acotada $\Rightarrow (S_N)$ converge.

Si $x_7$ es el supremo, $S_1 = \ldots = S_7$, pero a partir de $S_8$ ese supremo "bajará" porque dejamos $x_7$ atrás y será otro, más pequeño.

Aunque no exista $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

$$\limsup x_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

- Si $(x_n)$ no es acotada superiormente,

sí existe $\limsup x_n$

$$\limsup x_n = +\infty$$

## DEM

$\boxed{(i)}$ Sup. que $\alpha < 1$ y tomemos $\varepsilon > 0$ con $\alpha + \varepsilon < 1$.

$$\alpha = \limsup |x_n|^{1/n} \iff \lim_{N\to\infty} \sup\{|x_n|^{1/n} : n \geq N\} = \alpha$$

Por la definición de límite, para el $\varepsilon > 0$ anterior existe $N_0 \in \mathbb{N}$, con

$$\left| \sup\{|x_n|^{1/n} : n \geq N\} - \alpha \right| < \varepsilon \quad \forall N \geq N_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < \sup\{|x_n|^{1/n} : n \geq N\} < \alpha + \varepsilon \quad \forall N \geq N_0$$

En particular, se cumple que $\sup\{|x_n|^{1/n} : n \geq N_0\} < \alpha + \varepsilon$ y si el supremo es menor que $\alpha + \varepsilon$, todos los elementos para $n \geq N_0$ lo son, por tanto,

$$|x_n|^{1/n} < \alpha + \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x_n| < (\alpha+\varepsilon)^n \quad \forall n \geq N_0}$$

La sucesión $|x_n|$ está por debajo de la sucesión $(\alpha+\varepsilon)^n$ para $n$ lo suficientemente grande

$\alpha = \overline{\lim}\ \sup |x_n|^{1/n}$, que son elementos positivos

Además, como $0 < \alpha < \alpha+\varepsilon < 1$,

$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+\varepsilon)^n$ converge por ser geométrica

Si empieza en otro $n$, también converge

$\Rightarrow \sum |x_n|$ converge ✓

Crit. de comparación

$\boxed{(ii)}$ Sup. ahora que $\alpha > 1$, siendo

$$\alpha = \overline{\lim}\ \sup |x_n|^{1/n}$$

Vamos a usar el siguiente resultado (que no demostramos aquí, sino en el tema de sucesiones):

$\boxed{\text{Propiedad del } \overline{\lim}\ \sup}$

Sea $(x_n)$ una sucesión. Entonces, existe una subsucesión suya cuyo límite es $\overline{\lim}\ \sup x_n$.

Esto nos dice que existe una subsucesión de $(|x_n|^{1/n})$ cuyo límite es $\alpha > 1$. Supongamos ahora que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Para $\varepsilon = 1$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n| < 1 \quad \forall n \geq N_0 \Rightarrow |x_n|^{1/n} < 1 \quad \forall n \geq N_0$$

Así, solo habría un nº finito de valores de $n$ para los que $|x_n|^{1/n} \geq 1$, lo cual contradice ⊕. Necesariamente

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum x_n \text{ diverge ✓}$$

No se da la condición necesaria para la convergencia.

$\boxed{(iii)}$ Veamos que si $\alpha = 1$, el criterio de la raíz es inconcluyente. Para ello, usamos dos ejemplos:

Serie armónica. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Aplicando el criterio:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n^{1/n}}_{\to 1}} = 1 \leftarrow \alpha = 1 \quad \text{y diverge}$$

2-serie. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\underbrace{n^{1/n}}_{\to 1}}\right)^2 = 1 \leftarrow \alpha = 1 \quad \text{y converge } (0<p<1)$$

# Criterio del cociente o D'Alembert

## Criterio del cociente

Sea $\sum x_n$ una serie de términos no nulos

(i) Si $\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum x_n$ converge absolutamente

(ii) Si $\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge

(iii) Si $\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, el criterio no nos da información

$\rightarrow$ Si existe $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, estos valores coinciden.

## PROPIEDAD DE LIMSUP Y LIMINF

Sea $(x_n)$ una sucesión real. Entonces,

$$\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \liminf |x_n|^{1/n} \leq \limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

$\boxed{\text{DEM}}$

$\boxed{(i)}$ Usando la prop. anterior

$$\lim\sup |x_n|^{1/n} \leq \lim\sup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$$

Por el criterio de la raíz, $\sum x_n$ converge absolutamente ✓

$\boxed{(ii)}$

$$1 < \lim\inf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \lim\sup |x_n|^{1/n}$$

Por el criterio de la raíz, $\sum x_n$ diverge ✓

$\boxed{(iii)}$ Para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\leftarrow x_n$ $\quad x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $\quad x_n, x_{n+1}$ son positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$ y la serie diverge por ser la armónica

Para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\leftarrow$ p-serie con $p=2$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

y la serie converge $\rightarrow$ El criterio no nos da información, pues en ambos casos ✓

$$\underbrace{\lim\inf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|}_{1} \leq 1 \leq \underbrace{\lim\sup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|}_{1}$$

porque coinciden con $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$

# Crit. de la raíz vs Crit. cociente

## Criterio de la raíz

Sea $(x_n)$ una sucesión y sea

$$\alpha = \limsup |x_n|^{1/n}.$$

(i) Si $\alpha < 1 \Rightarrow \sum x_n$ converge absolutamente

(ii) Si $\alpha > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge

(iii) Si $\alpha = 1$, el criterio no nos da información

## Criterio del cociente

Sea $\sum x_n$ una serie de términos no nulos

(i) Si $\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum x_n$ converge absolutamente

(ii) Si $\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverge

(iii) Si $\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, el criterio no nos da información

## Propiedad de limsup y liminf

Sea $(x_n)$ una sucesión real. Entonces,

$$\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \liminf |x_n|^{1/n} \leq \limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

**OBSERVACIÓN:**

(1) Si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1 \Rightarrow \liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1 = \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$

El Crit. del cociente no nos da info, ni el Crit. de la raíz, tampoco.

(2) Si $\limsup |x_n|^{1/n} = 1$, el Crit. de la raíz falla y el Crit del Cociente también.

(3) Puede pasar que el Crit. del cociente falle, pero el de la raíz no, porque puede que

$$\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

y, sin embargo,

$$\limsup |x_n|^{1/n} \neq 1$$

# Criterio de convergencia para series alternadas

<u>Def</u> (Serie alternada) Una serie es alternada si tiene la forma

$$\sum (-1)^{n} x_n \quad n-1,\ n+1 \ldots$$

donde $x_n \geq 0$ para todo $n$

<u>Ej</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

<u>Proposición</u> (Criterio de convergencia para series alternas)

Sea $(x_n)$ una sucesión con $x_n \geq 0$ para todo $n$ que cumple:

$x_n \geq x_{n+1} \ \forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

(i) $(x_n)$ es decreciente para $n$ suficientemente grande

(ii) $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

$n-1$, $n+1, \ldots$

Entonces la serie $\sum (-1)^{n} x_n$ converge

**DEM**

Estudiamos la sucesión de las sumas parciales de $\sum (-1)^{n+1} x_n$, en particular:

$$S_{2n} = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - \dots + x_{2n-1} - x_{2n}$$

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = x_1 - x_2 + \_\_ + x_{2n-1} - x_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2}$$

$$\longrightarrow S_{2n+2} - S_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} \geq 0$$

$(x_n)$ decreciente

La subsucesión de los términos pares $(S_{2n})$ es creciente.

Además, si escribimos

$$S_{2n} = x_1 - \overbrace{\left[ \underbrace{(x_2 - x_3)}_{\geq 0} + \_\_ + \underbrace{(x_{2n-2} - x_{2n-1})}_{\geq 0} + \underbrace{x_{2n}}_{\geq 0} \right]}^{\geq 0}$$

$(x_n)$ decrec. $\qquad x_n \geq 0 \ \forall n$

$\Rightarrow S_{2n} \leq x_1$ para todo $n \geq 1 \Rightarrow (S_{2n})$ acot. superiormente

$$\boxed{(S_{2n}) \text{ es convergente}}$$

En cuanto a la subsucesión de los términos impares,

$$S_{2n+1} = \underbrace{\boxed{x_1 - x_2 + \_\_ + x_{2n-1} - x_{2n}}}_{S_{2n}} + x_{2n+1} = S_{2n} + x_{2n+1}$$

Tomando límites,

Converge a L, por poner un nº

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}} = L$$

Por hip. $\lim x_n = 0$ y, por tanto, cualquier subsucesión también tiende a 0

$$\boxed{(S_{2n+1}) \text{ es convergente}}$$

Utilizando ahora el siguiente resultado sobre subsucesiones:

> Sea $(x_n)$ una sucesión real, de modo que las subsucesiones $(x_{2n})$ y $(x_{2n+1})$ convergen a $L \in \mathbb{R}$.
>
> Entonces,
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

Concluimos que $(S_n)$ es convergente y, así,

$$\sum (-1)^n x_n \text{ converge}$$

# 3. Ejemplos

Ej: Estudiar el carácter de convergencia:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2+1}}$ $x_n$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \qquad x_{n+1}, x_n > 0$

Crit. del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

El crit. no nos da información. El crit. de la raíz tampoco.

Crit. de comparación

$$n^2+1 > n^2 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}} \quad y \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}} \quad (2\text{-serie})$$

$\Rightarrow$ La serie converge

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$

Crit. cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+3}}{\frac{n}{n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n+1)(n^2+3)}^{n^3}}{\underbrace{n\left[(n+1)^2+3\right]}_{n^3}} = 1$$

El Crit del cociente no nos da información y el de la raíz tampoco.

Crit comparación

Como $x_n = \frac{n}{n^2+3}$ podemos pensar que "puede ser como" $\frac{1}{n}$

y $\sum \frac{1}{n}$ diverge, así que hay que acotar $x_n$ por abajo.

$$\cancel{\frac{1}{n} = \boxed{\frac{n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2+3}}}$$

¡Esto es falso! Si el denom. es menor, el cociente es mayor

$$\frac{1}{4n} = \frac{n}{4n^2} \leq \frac{n}{n^2+3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{4n} \text{ diverge por ser la armónica por una cte.}$$

$3 \leq 3n^2 \Rightarrow n^2+3 \leq n^2+3n^2 = 4n^2$

La serie $\sum \frac{n}{n^2+3}$ diverge

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Crit. cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{3^n}^{1/3}\cdot\overbrace{(n+1)}^{1}}{3^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{3} < 1$$

La serie converge

Crit raíz

$$\lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{1}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{La serie converge}$$

Crit. comparación

$$\frac{1}{3^n} \leq \frac{n}{3^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ converge por ser geométrica}$$

La serie converge.

---

Ej Estudiar el carácter de convergencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(-1)^n - 3}\right)^n$$ Usamos el criterio de la raíz

$$|x_n|^{1/n} = \left|\frac{2}{(-1)^n - 3}\right| = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 1/2, & n \text{ impar} \end{cases}$$

n par: $\left|\frac{2}{1-3}\right| = \left|\frac{2}{-2}\right| = 1$

n impar: $\left|\frac{2}{-1-3}\right| = \left|\frac{2}{-4}\right| = 1/2$

! No existe $\lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n}$ porque la subsuc. de los pares y la de los impares tienen límites distintos.

Calculamos lim sup

$$\limsup |x_n|^{1/n} = \lim_{N\to\infty} \sup\{|x_n|^{1/n} : n \geq N\} = 1$$

Def.

Este supremo es 1

Es 1 o 1/2 todo el rato

El crit. de la raíz no nos da información

Intentemos usar el Crit. del cociente:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{2}{(-1)^{n+1}-3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{(-1)^n-3}\right)^n}\right| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & n \text{ par} \\ 2^n & n \text{ impar} \end{cases}$$

- n par

$$\left|\frac{\left(\frac{2}{-4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{-2}\right)^n}\right| = \left|\frac{\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{\underbrace{(-1)^n}_{1}}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

- n impar,

$$\left|\frac{\underbrace{(-1)^{n+1}}_{1}}{\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{-(1/2)^n}}\right| = \frac{1}{(1/2)^n} = 2^n$$

De nuevo, no existe $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ porque la subsucesión de los pares tiende a 0 y la de los impares, a $+\infty$.

Calculamos limsup y liminf

$$\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \sup\left\{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| : n\geq N\right\} = +\infty$$

$$\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \inf\left\{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| : n\geq N\right\} = 0$$

El Crit. del Cociente no nos da información.

Además, el Crit. de comparación es solo para series de términos positivos... ¿QUÉ HACEMOS?

Si nos fijamos en la serie original,

$$x_n = \left(\frac{2}{(-1)^n - 3}\right)^n$$

para n par, $x_n = 1$, por lo que la subsucesión de los términos pares de $(x_n)$ tiende a 1, lo que nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$$

¡¡ES MUY IMPORTANTE NO PASAR ESTO POR ALTO!!

¡No se cumple la condición necesaria para la convergencia!

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(-1)^n-3}\right)^n$ diverge

Ej Estudiar la convergencia de las series:

> Sea $M \in \mathbb{R}^+$, y sea $\sum x_n$ una serie de términos positivos
>
> $\sum x_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum M \cdot x_n$ converge

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{7}{4}}_{M} \cdot \frac{1}{n}$ tiene el mismo carácter de convergencia que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge por ser la serie armónica.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100!}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{100!}_{M} \cdot \frac{1}{n^3} \rightsquigarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}_{\text{p serie con } p=3}$ converge

$\sum \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}^+$ converge $\Leftrightarrow$ $p>1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{3}_{M} \cdot \frac{1}{n^2+n} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

No se puede separar

$n^2+n \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Criterio de comparación

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n}$ converge

Ej Estudiar la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ Distinguir entre pares e impares

$$x_n = \begin{cases} 2^{1-n} & n \text{ par} \\ 2^{-1-n} & n \text{ impar} \end{cases} \quad \text{o} \quad x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}, & n \text{ par} \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

obs: Como las subsucesiones $(x_{2n})$ y $(x_{2n+1})$ cumplen que

$$\lim x_{2n} = 0 = \lim x_{2n+1}$$

podemos deducir que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Se cumple la condición necesaria para la convergencia.

Criterio del cociente

- Si $n$ es par: $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{1/2^{n+2}}{1/2^{n-1}}\right| = \frac{2^{n-1}}{2^{n+2}} = \frac{1}{8}$

impar, Son positivos, $n-1-n-2=-3$

- Si $n$ es impar: $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{1/2^n}{1/2^{n+1}}\right| = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

par, impar

No existe $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ porque la subsucesión de los pares y la de los impares tienen límites distintos. Sin embargo,

es $\frac{1}{8}$ o 2 alternativamente.

$$\liminf\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\inf\left\{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| : n \geq N\right\}}_{1/8} = 1/8$$

$$\limsup\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sup\left\{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| : n \geq N\right\}}_{2} = 2$$

Utilizando el Criterio del Cociente, no podemos concluir nada.

Criterio de la raíz

$$|x_n|^{1/n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} = 2^{\frac{(-1)^n}{n} - 1}$$

Podemos calcular el límite: tiende a 0

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n} - 1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$$

El Crit. de la raíz sí funciona

La serie original converge

Ej. Estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{3^n}}$$

Como $-1 \leq \cos n \leq 1 \overset{+2}{\Rightarrow} 1 \leq 2+\cos n \leq 3$ y la serie es de términos positivos, por lo que podemos usar el Criterio de Comparación

$:3^n$

$$\boxed{\frac{2+\cos n}{3^n} \leq \frac{3}{3^n}}$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n}$ converge por ser una geométrica

La serie original converge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)}$$

! Esta serie no es de términos positivos, ni es alternada.

Vamos a demostrar que no cumple el criterio necesario para la convergencia, esto es, que

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{9}\right) \neq 0.$$

De hecho, como el seno oscila, no existe el límite de la sucesión. Buscamos una subsucesión que cumpla:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right) = 0 \iff \frac{\cancel{\pi} n}{9} = k\cancel{\pi} \quad \text{para } k \in \mathbb{N}$$

$$\iff n = 9k$$

$$\sin\left(\frac{9k\pi}{9}\right) = \sin(k\pi) = 0$$

Así, para la subsucesión $(x_{9k})$,

$$\lim_{k\to\infty} x_{9k} = 0.$$

Busquemos otra subsucesión con otro límite. Sabemos que,

para $n=3$,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De hecho,

$k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{3\pi}{9} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi + 18k\pi}{9}\right) = \sin\left(\frac{[3+18k]\pi}{9}\right)$$

Si $n = 3+18k$ para $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{n\pi}{9}\right)$ vale $\sqrt{3}/2$. Así, para la subsucesión $(x_{3+18k})$,

$$\lim_{k\to\infty} x_{3+18k} = \sqrt{3}/2$$

$\rightarrow$ Dos subsucesiones de $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{9}\right)$ tienen límites distintos, por lo que

$$\nexists \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{9}\right)$$

y no se cumple la cond. necesaria para la convergencia.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{9}\right) \quad \underline{\text{diverge}}$$

---

Ej: Estudiar la convergencia de las series

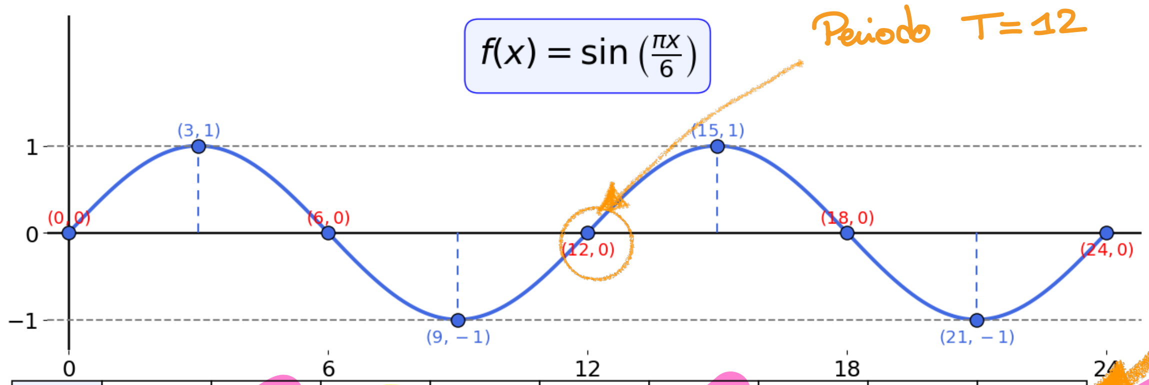
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right]^n$$

Sugiere usar el criterio de la raíz

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]^n}$$

$$|x_n|^{1/n} = \left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|$$

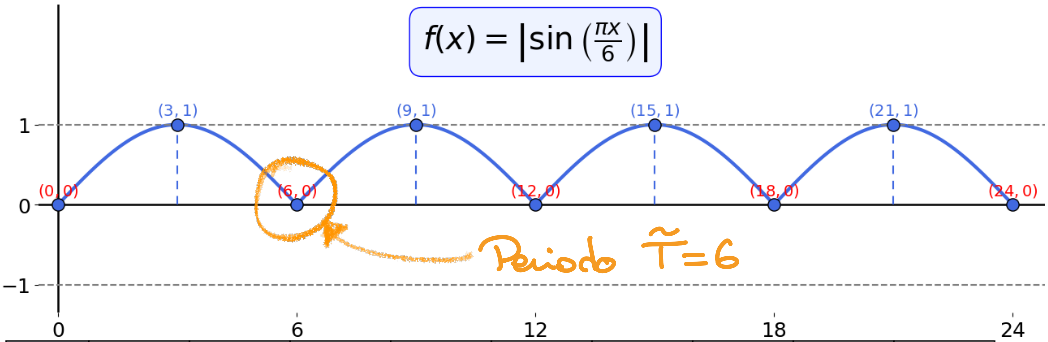
Para calcular $\limsup |x_n|^{1/n}$ veamos qué valores toma, usando su gráfica:




6K

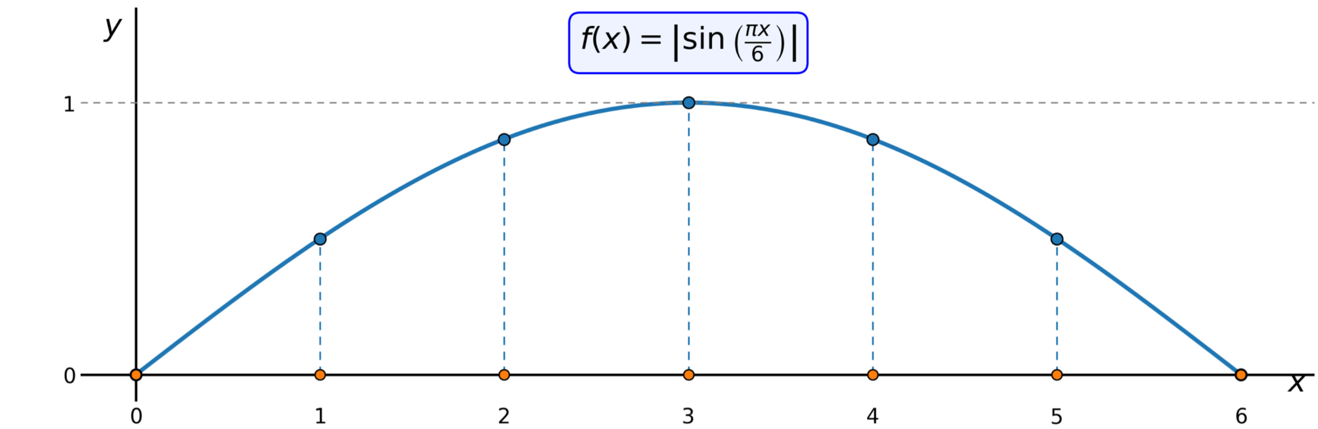
| $x$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ | |
| $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 |

12K+3




| $x$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Para hallar el supremo, basta mirar los valores $n = 1, \ldots, 6$:




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\left\|\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right\|$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

$$\limsup \left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \overset{\text{Def}}{=} \lim_{N\to\infty} \overset{1}{\boxed{\sup\left\{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| : n \geq N\right\}}} = 1$$

El criterio de la raíz no nos da información. ¡Pero no nos hace falta! Queremos estudiar el carácter de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]^n$$

¡Tenemos la gráfica!

La subsucesión

$$x_{6k}=\Big[\underbrace{\sin\left(\frac{6k\pi}{6}\right)}_{0}\Big]^n=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{6k}=0$$

La subsucesión

$$x_{12k+3}=\left[\sin\left(\frac{(12k+3)\pi}{6}\right)\right]^n=\Big[\overbrace{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}^{1}\Big]^n=1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{12k+3}=1$$

→ Dos subsuc. con distintos límites

$\Rightarrow$ No existe $\lim_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]^n$

$\Rightarrow$ No se cumple la condición necesaria para la convergencia

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]^n \text{ diverge.}$$

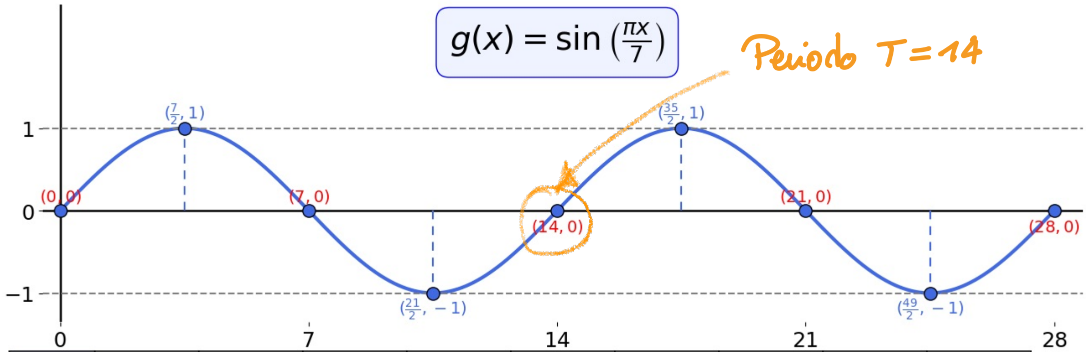
---

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right]^n}$$

Sugiere usar el criterio de la raíz

$$|x_n|^{1/n}=\left|\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right|$$

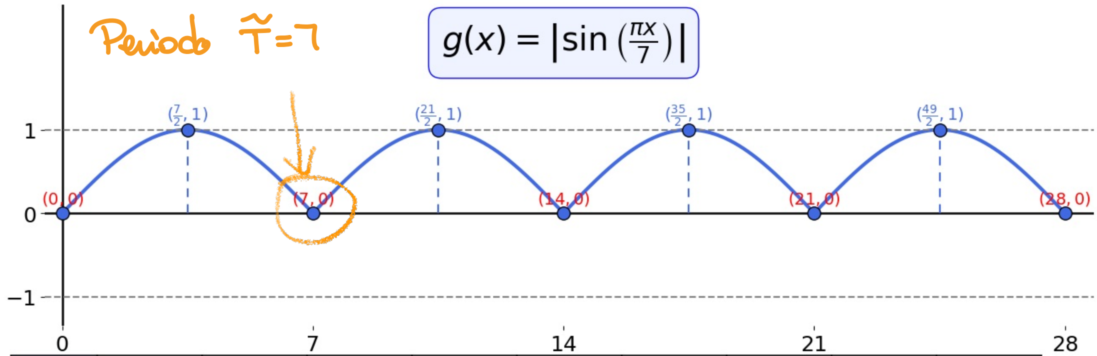
Para calcular el $\limsup |x_n|^{1/n}$ veamos qué valores toma, usando su gráfica:




Periodo $T=14$

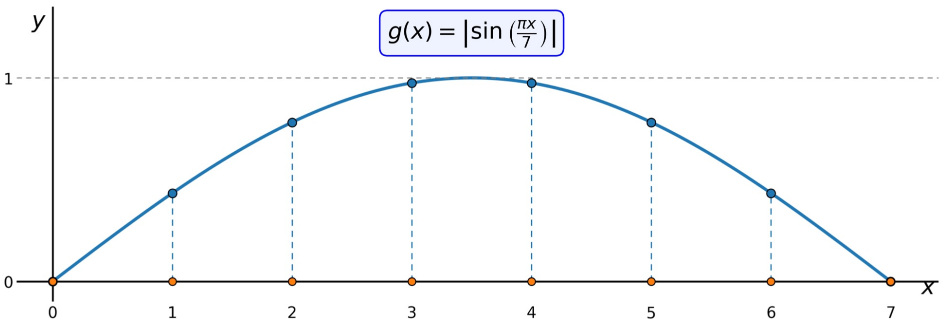
| $x$ | 0 | $\frac{7}{2}$ | 7 | $\frac{21}{2}$ | 14 | $\frac{35}{2}$ | 21 | $\frac{49}{2}$ | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{7}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| $\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |

Periodo $\tilde{T}=7$




| $x$ | 0 | $\frac{7}{2}$ | 7 | $\frac{21}{2}$ | 14 | $\frac{35}{2}$ | 21 | $\frac{49}{2}$ | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{7}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $3\pi$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| $\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

para hallar el supremo, basta mirar los valores $n=1,\dots,7$




| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi x}{7}$ | 0 | $\frac{\pi}{7}$ | $\frac{2\pi}{7}$ | $\frac{3\pi}{7}$ | $\frac{4\pi}{7}$ | $\frac{5\pi}{7}$ | $\frac{6\pi}{7}$ | $\pi$ |
| $\left\|\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)\right\|$ | 0 | 0.43 | 0.78 | 0.97 | 0.97 | 0.78 | 0.43 | 0 |

$$\limsup \left|\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right| \overset{\text{Def}}{=} \lim_{N\to\infty} \boxed{\sup\left\{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right| : n \geq N\right\}}^{<1} < 1$$

Todos los valores que toma $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right|$ son menores que 1, pues si

$$\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right) = 1 \iff \frac{n\cancel{\pi}}{7} = \frac{\cancel{\pi}}{2} \iff n = 7/2 \notin \mathbb{N}$$

Concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\right]^n$ converge

$$\boxed{\text{Dado } m\in\mathbb{N},\ m>1, \text{ la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{m}\right)\right]^n \text{ converge} \iff m \text{ impar}}$$

Ej Estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \qquad f(x) = \frac{1}{x\log x}$$

El criterio de comparación no nos sirve porque si intentamos acotar $\frac{1}{n\log n}$ por arriba por algo que converge, no podemos; pero tampoco acotar por abajo por algo que diverja...
Además, los criterios del cociente y la raíz no nos dan información. ¡¿Qué hacemos?! Usamos una idea similar a la que utilizamos al estudiar la serie armónica.

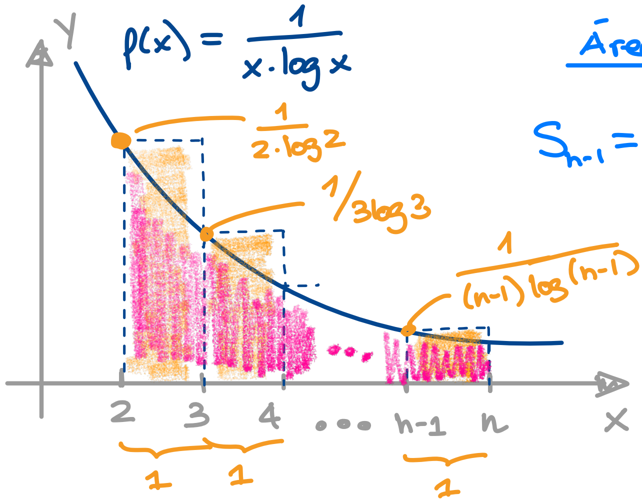
Si consideramos la función

$$f(x)=\frac{1}{x\log x} \quad \text{para} \quad x\in[2,+\infty);$$

estudiando su monotonía, tenemos:

$$f'(x)=\frac{-\left(\log x+\overbrace{x\cdot\frac{1}{x}}^{1}\right)}{[x\log x]^2}=-\frac{\overbrace{1+\log x}^{>0}}{\underbrace{[x\log x]^2}_{>0}}<0 \quad \text{para} \quad x\in[2,+\infty)$$

Esto nos dice que $f(x)$ es decreciente.




Área rectángulos:

$$S_{n-1}=\frac{1}{2\cdot\log 2}+\frac{1}{3\cdot\log 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\log(n-1)}$$

Área bajo la curva:

$$\int_2^n \frac{1}{x\cdot\log x}\,dx=\int_{\log 2}^{\log n}\frac{1}{t}\,dt=$$

$t=\log x;\quad e^t=x$

$dt=\dfrac{dx}{x}\rightarrow x\,dt=dx$

$x=n\rightarrow t=\log n$

$x=2\rightarrow t=\log 2$

$$=\log t\Big|_{\log 2}^{\log n}$$

BARROW

$$=\log(\log n)-\log(\log 2)$$

$$\Rightarrow S_{n-1}\geq\log(\log n)-\log(\log 2)$$

Tomando límites,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\geq\lim_{n\to\infty}\left[\overbrace{\log(\log n)}^{+\infty}-\overbrace{\log(\log 2)}^{\text{cte}}\right]=+\infty$$

Es el valor de la serie original

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ **diverge**

# Anexo: Constante de Euler-Mascheroni

**Lema** (La constante de Euler-Mascheroni)

La sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

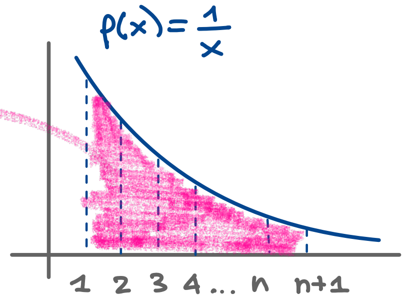
converge y su límite, $\gamma$, se llama constante de E-M

**DEM**

- $t_n \geq 0$

log x creciente

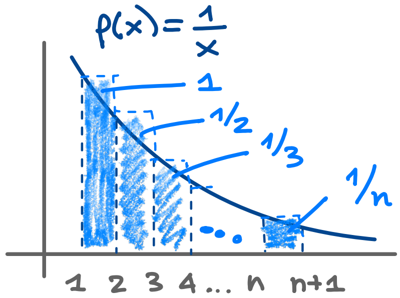
$$\log n \leq \log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$




$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \_\_ + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

El área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la curva

$$\leq 1 + \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{n}$$



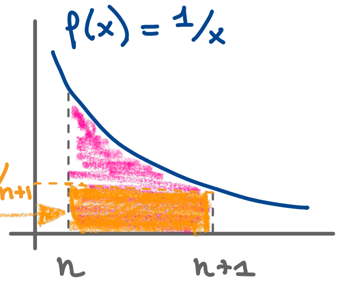

$$\Rightarrow \log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{n} - \log n}_{t_n} \geq 0 \checkmark$$

- $t_n$ es decreciente

$$t_n - t_{n+1} = \left(\cancel{1} + \_\_ + \cancel{\frac{1}{n}} - \log n\right) - \left(\cancel{1} + \_\_ + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)\right)$$

$$= \underbrace{\log(n+1) - \log n}_{\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}$$




Como el área bajo la curva es mayor o igual que la del rectángulo, la diferencia anterior es $\geq 0$, esto es

$$t_n - t_{n+1} \geq 0 \rightarrow t_n \geq t_{n+1} \checkmark$$

- <u>Conclusión</u>

Como $(t_n)$ es decreciente y acotada inferiormente, converge y llamamos

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} t_n \qquad \blacksquare$$