

Sucesiones

1. Sean $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$x < y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y.$$

2. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones convergentes con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L.$$

Demostrar que

- a) $K < L \Rightarrow x_n < y_n$ para n suficientemente grande.
 b) $K \leq L \not\Rightarrow x_n \leq y_n$ para n suficientemente grande.
3. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones que cumplen:

- $|y_n| \leq x_n$ para n lo suficientemente grande.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

4. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones con $x_n \leq y_n$ para n suficientemente grande. Demostrar que

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

5. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L, \quad L \in \mathbb{R}^+.$$

Demostrar que

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = +\infty.$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$

6. Demostrar que si (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces converge.
7. Definimos las sucesiones (e_n) y (f_n) como

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hemos probado en la teoría varios hechos:

- (e_n) es creciente y acotada superiormente, por lo que converge y lo hace al **número e** .
- (f_n) es decreciente con $f_n \leq f_1 = 4$.
- Además, $e_n \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostrar que (f_n) también converge al número e .

8. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

9. Sea (x_n) una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e}$$

10. Sea (x_n) una sucesión divergente a $+\infty$ y sea $k \in \mathbb{Z}^+$.
- a) Demostrar que si eliminamos los k primeros elementos de (x_n) , la sucesión resultante también diverge a $+\infty$.
 - b) Demostrar que si añadimos k elementos a (x_n) , la sucesión resultante también diverge a $+\infty$.
 - c) Deducir que si eliminamos k elementos cualesquiera de (x_n) , la sucesión resultante también diverge a $+\infty$.
11. Sea $L \in [0, 1]$. Demostrar que existe una sucesión (q_n) de números racionales que converge a L .
12. Sea (r_n) una enumeración del conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es decir, los términos de la sucesión son todos los números racionales (que sabemos que son numerables). Demostrar que existe una subsucesión (r_{n_k}) tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k} = +\infty.$$

13. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado. Demostrar que existe una sucesión (x_n) , con $x_n \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup X.$$

14. Demostrar que en $\mathbb{Q}$ no toda sucesión de Cauchy es convergente.
15. Sea (x_n) una sucesión de números reales que cumple que

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que (x_n) es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente en $\mathbb{R}$.

16. Sea la sucesión definida por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(-1)^n}{n}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

- a) Probar que (x_n) es una sucesión de Cauchy.
- b) Expresar el límite en función de x_1 .

17. Sea (a_n) una sucesión real tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

y se define

$$x_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Probar que (x_n) es de Cauchy.

18. Sea $x_n = \log n$.

a) Demostrar que $|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

b) Probar que (x_n) no es de Cauchy.

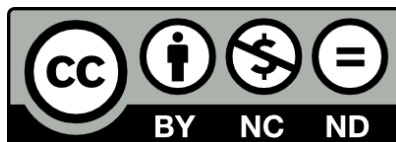
19. Sea la sucesión definida por

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

a) Demuestra que para todo N existe $m > n \geq N$ tal que

$$|x_m - x_n| > 1.$$

b) Deduce que (x_n) no es de Cauchy.



© 2026 Fernando Sanz — Aleph1Formación

Este material se distribuye bajo la licencia **Creative Commons
Atribución–NoComercial–SinObraDerivada 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**.
Se permite su uso y distribución con fines no comerciales, siempre que se reconozca la autoría.
No se permite la modificación del material.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>