

SUCESIONES REALES

Idea: Una sucesión real es una secuencia infinita de los reales en la que hay un 1º término, un 2º, un 3º,...

Ej: Son sucesiones reales:

a)

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Término general de la sucesión: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

Donde empieza

Nos permite hallar cualquier término concreto:

$$a_0 = \frac{1}{2^0} = 1; \quad a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}; \dots \quad a_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}.$$

Términos de la sucesión

b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

$$(b_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$b_1 = 2; \quad b_2 = \frac{3}{2}; \quad b_3 = \frac{4}{3}; \quad b_4 = \frac{5}{3}; \dots$$

c) $c_n = (-1)^n$

$$(c_n)_{n=0}^{\infty}$$

Otro modo de expresar la sucesión

$$c_n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

Arrows indicating: $n=0$ points to 1, $n=1$ points to -1, $n=2$ points to 1, etc.

d) $d_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$$d_0 = \cos 0 = 1; \quad d_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad d_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$d_3 = \cos(\pi) = -1; \quad d_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \quad d_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$d_6 = \cos(2\pi) = \cos 0 = 1.$$

comienzan a repetirse cíclicamente.

e)

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Sucesión definida por recurrencia

SUCESIÓN DE FIBONACCI

Definimos f_n a partir de los 2 términos anteriores

$$p_1 = 1; \quad p_2 = 1;$$

$$p_3 = p_2 + p_1 = 1 + 1 = 2$$

$$p_4 = p_3 + p_2 = 2 + 1 = 3; \quad p_5 = p_4 + p_3 = 3 + 2 = 5; \dots$$

! En una sucesión por recurrencia, para hallar un término, tenemos que conocer todos los anteriores.

Def (Sucesión real) Una sucesión real es una función

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

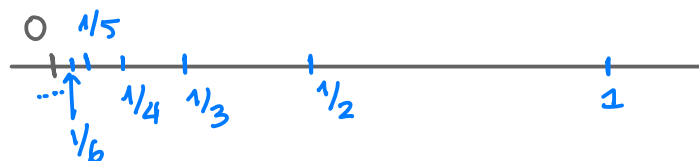
Se obvia que es una función y se denota por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

CONVERGENCIA DE SUCECIONES . LÍMITES.

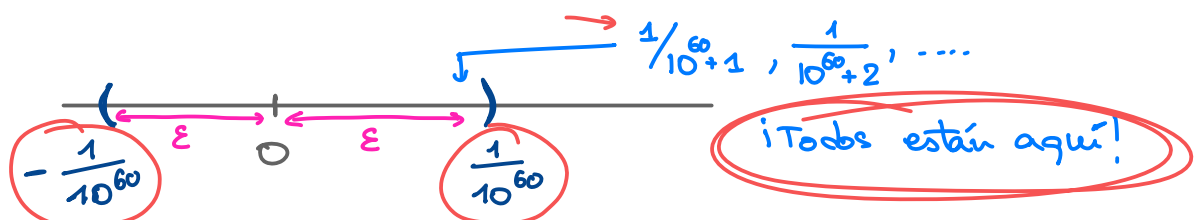
Idea: El límite de una sucesión (x_n) es, en caso de existir, un n° real $L \in \mathbb{R}$ al que los elementos de (x_n) "se acercan" indefinidamente.

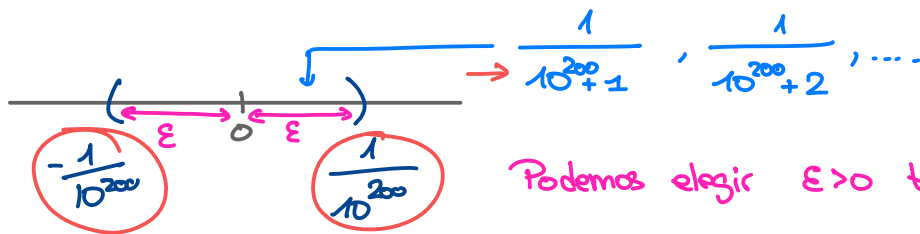
$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{10^4}, \dots, \frac{1}{10^{12}}, \dots \right\}$$

Parece que los términos de (x_n) se acercan a 0:



Que "se acercan" a 0, significa que si elegimos un intervalo muy pequeño alrededor de 0, a partir de un punto, toda la sucesión está allí dentro. ¡Todo lo pequeño que queramos!





Podemos elegir $\epsilon > 0$ todo lo pequeño que queramos, que, a partir de un término, toda la sucesión está ahí dentro.

Df (Límite de una sucesión). Sea (x_n) una sucesión real. Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de (x_n) o que (x_n) converge a L si

$\forall \epsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Por muy pequeño que sea $\epsilon > 0$ A partir de un término n_0 $\epsilon < x_n - L < \epsilon$ Para cualquier término mayor o igual que n_0 .

$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$

$(L - \epsilon, L + \epsilon)$

Toda la sucesión está aquí dentro

Df (Sucesiones divergentes) Sea (x_n) una sucesión real. Decimos que:

- (x_n) diverge a $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$ ¡Para cualquier M que elijamos!
- (x_n) diverge a $-\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq M \quad \forall n \geq n_0$ ¡Para cualquier M que elijamos!

Notación: Si (x_n) converge a L , escribimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \quad \text{o} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

Si (x_n) diverge a $+\infty$, escribimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{o} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

— Demostración alternativa de la unicidad del límite —
Def (Límite de una sucesión). Sea (x_n) una sucesión real. Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de (x_n) o que (x_n) converge a L si
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Propiedad Si $x, y \in \mathbb{R}$,
 $x = y \Leftrightarrow |x - y| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

DEM:

$$\Rightarrow x = y \Rightarrow |x - y| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ Sup. que $\forall \varepsilon > 0, |x - y| < \varepsilon$, pero que $x \neq y$.

$$x \neq y \Rightarrow |x - y| = d > 0$$

Tomando $\varepsilon < d$, $|x - y| > \varepsilon$ ¡Contradicción!



Prop (Unicidad del límite de una sucesión)

Si (x_n) es una sucesión convergente, entonces su límite es único.

DEM: Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ son límites de (x_n) .

Fijado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

- $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$.

- $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$

Si tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ambas desigualdades se cumplirán $\forall n \geq n_0$.

Ahora,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - x_n + x_n - L_2| \stackrel{D.T}{\leq} |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| \\ &= |x_n - L_1| + |x_n - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Pero como $\varepsilon/2$ es arbitrario, en realidad tenemos que

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L_1 = L_2 \quad \checkmark$$

Propiedad anterior



CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA: EJEMPLOS

Ej: Demostrar que $x_n = \frac{1}{n}$ converge a 0.

Def (Límite de una sucesión). Sea (x_n) una sucesión real. Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de (x_n) o que (x_n) converge a L si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ para que se cumpla

$$|x_n - 0| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

$$\downarrow \quad \swarrow \frac{1}{n} \text{ es positivo}$$
$$|x_n| < \varepsilon \rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Ya tenemos la condición: se cumple si

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{pero... } n \in \mathbb{N} \text{ y } \varepsilon > 0 \text{ arbitrario.}$$

Hay que tomar n_0 como el primer natural mayor que $1/\varepsilon$

$$\varepsilon = 2 \rightsquigarrow n > \frac{1}{2} \rightsquigarrow n_0 = 1$$

$$\varepsilon = 10^{-3} \rightsquigarrow n > \frac{1}{10^{-3}} \rightsquigarrow n > 10^3 = 1000 \rightsquigarrow n_0 = 1001$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi^6} \rightsquigarrow n > \frac{1}{1/\pi^6} \rightsquigarrow n > \pi^6 \quad \text{pero... } \pi^6 \text{ cuánto vale?}$$

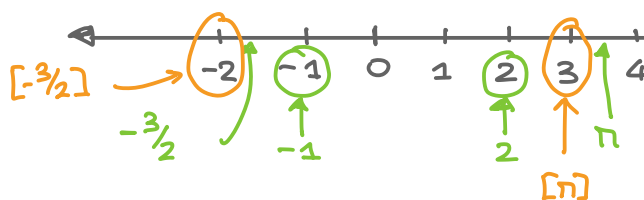
No nos hace falta saberlo: usamos la función parte entera.

Parte entera

Parte entera de x

Para $x \in \mathbb{R}$, $[x] =$ "Mayor entero de entre los que son menores o iguales que x "

$$[2] = 2 \quad [-1] = -1 \quad [\pi] = 3 \quad \left[-\frac{3}{2}\right] = -2$$



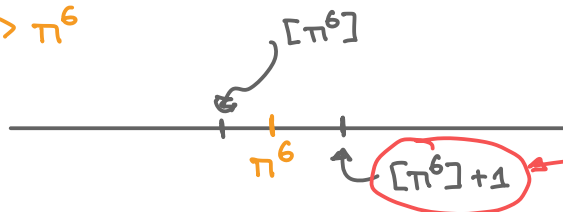
PARTE ENTERA

"

ENTERO "ANTERIOR"
o "ÉL MISMO"

⊛

$$n > \pi^6$$



Como $n > \frac{1}{\varepsilon}$, elegimos $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ y así nos aseguramos que se cumple la definición.

Conclusión: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \checkmark$

Ej: Demostrar que $x_n = \frac{n}{n+1}$ converge a 1.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y busquemos $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\forall n \geq n_0$ se cumpla:

$$\begin{aligned} |x_n - 1| < \varepsilon &\rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \rightarrow \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon \\ &\rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \\ &\rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{aligned}$$

Para que esto se cumpla, basta tomar $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil + 1$.

Hemos encontrado el n_0 para un $\varepsilon > 0$ cualquiera

Conclusión: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

Ej: Demostrar que la sucesión $x_n = n^2$ diverge.

Si diverge, debe hacerlo a $+\infty$ porque $n^2 \geq 0$ siempre.

(x_n) diverge a $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$$

Fijamos $M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande, y busquemos $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual se cumpla que $x_n \geq M$.

• Si $M \leq 0$, $x_n = n^2 \gg M$ para todo $n \geq 1$.
 (positive $\rightarrow$ negativo o cero)

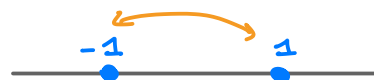
• Si $M > 0$,

$$x_n \gg M \rightarrow n^2 \gg M \rightarrow n \gg \sqrt{M}$$

Basta elegir n_0 como un n° natural mayor que $\sqrt{M}$ para que se cumpla la condición.

Conclusión: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Ej Demostrar que $x_n = (-1)^n$ no converge ni diverge.

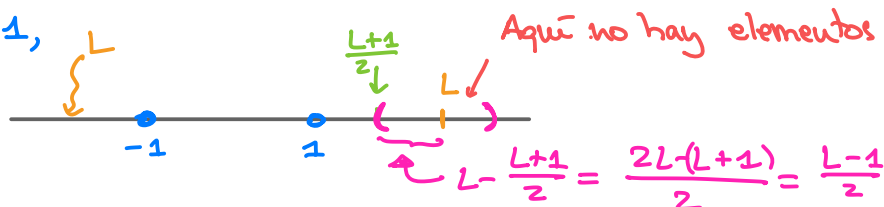
$$x_n = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$


No diverge porque si elegimos $M \in \mathbb{R}$, $M > 1$, ningún elem. de x_n cumple que $x_n \gg M$. Igual si $M < -1$.

No converge

Sup. que converge a un $L \in \mathbb{R}$.

• Si $L > 1$,

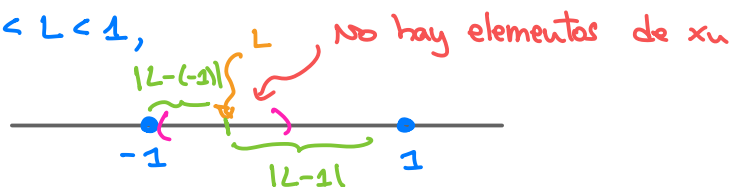


si tomamos $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, no se cumple que

$$|x_n - L| < \frac{L-1}{2} \text{ para ningún } n \in \mathbb{N}.$$

• Si $L < 1$ pasa lo mismo.

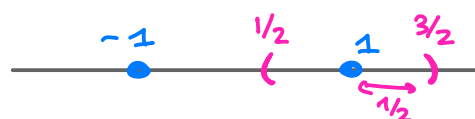
• Si $-1 < L < 1$,



tomando $\varepsilon = \min \{ |L-1|, |L-(-1)| \}$, no se cumple que

$$|x_n - L| < \varepsilon \text{ para ningún } n \in \mathbb{N}$$

• Si $L = 1$,



tomando $\varepsilon = 1/2$ todos los términos impares están fuera

de $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

- Si $L = -1$, para $\varepsilon = 1/2$ pasa igual con los términos pares.

Conclusión $x_n = (-1)^n$ no converge ni diverge.

Def (Sucesión oscilante) Si una sucesión (x_n) no converge ni diverge, decimos que es oscilante.

ELIMINAR UN N° FINITO DE ELEMENTOS DE UNA SUCESIÓN

Prop Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$ y sea $K \in \mathbb{Z}^+$.

Definimos la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ como:

$$y_n = x_{n+K}$$

Entonces, (y_n) también converge a L .

¿Qué nos dice en realidad esta proposición?

El "no" para y_n
↓

Supongamos que $K=7$

n	1	2	3	4 ...
y_n	y_1	y_2	y_3	$y_4 \dots$
x_{n+K}	x_8	x_9	x_{10}	$x_{11} \dots$

$$n_0 = 9 \rightsquigarrow m_0 = n_0 - K = 9 - 7 = 2$$

Si para (x_n) se cumple a partir de 9; para (y_n) es a partir de 2.

$$n_0 = 4 \rightsquigarrow m_0 = n_0 - K = 4 - 7 = -3^x$$

Si $n_0 \leq K \Rightarrow m_0 = 1$

La sucesión (y_n) es exactamente (x_n) , pero sin los K primeros términos. Podemos reescribir la proposición así

"Si a una sucesión convergente le quitamos un n° finito de términos (del inicio), sigue convergiendo al mismo límite"

Además, podemos "movernos" de los términos de una sucesión a los de la otra así:

$$y_n \longleftrightarrow x_{n+K}$$

$$x_n \longleftrightarrow y_{n-K}$$

DEM:

Como (x_n) converge a L , fijado un $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |y_{n-K} - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ y } n > K$$

¡Cuidado!
¿Y si $n_0 < K$?
¡ $n-K$ sería negativo!

Para que exista y_{n-K}

$$\Rightarrow |y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n' \text{ con}$$

$$n' = \max \{1, n_0 - K\}$$

De este modo, $\forall \varepsilon > 0 \exists n' \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n' \Rightarrow (y_n) \text{ converge a } L$$



Corolario 1 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que diverge a $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ y sea $k \in \mathbb{Z}^+$.

Definimos $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ como

$$y_n = x_{n+k}.$$

Entonces, (y_n) diverge a $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

DEM:

Como (x_n) diverge a $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ para cualquier $M \in \mathbb{R}$,

$$x_n \stackrel{\leq}{\geq} M \quad \forall n \geq n_0 \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y_n \stackrel{\leq}{\geq} M \quad \forall n \geq n' \text{ con } n' = \max\{1, n_0 - k\} \quad \checkmark \checkmark$$



Conclusión:

Si quitamos un n° finito de elementos del inicio de una sucesión, su carácter de convergencia no varía

Q1: ¿Y si no son del inicio, si no que están en posiciones arbitrarias?

Q2: ¿Y si en lugar de quitar elementos, los añadimos?

Prop Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$ y sea $k \in \mathbb{Z}^+$.

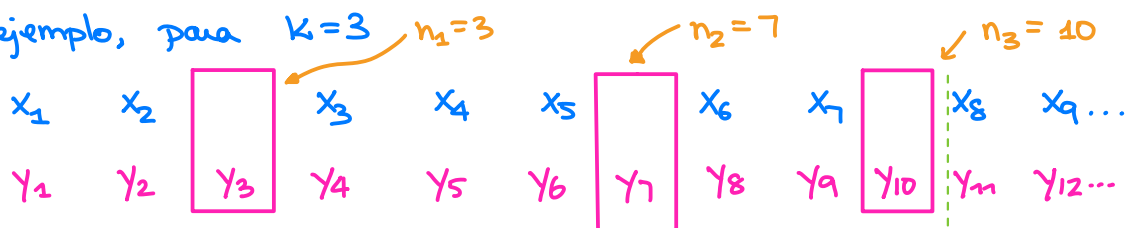
Construimos otra sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ añadiendo a (x_n) k valores, sin alterar el orden correlativo de los términos que ya estaban.

Entonces, (y_n) converge a L .

DEM:

Supongamos que añadimos los nuevos k términos en las posiciones $n_1, \dots, n_k$, donde $n_1 < \dots < n_k$

Por ejemplo, para $k=3$



A partir de aquí

todos los términos ya estaban.

L

A partir del término y_{n_k+1} la sucesión nueva cumple

$$y_n = x_{n-k} \text{ para } n > n_k$$

Como (x_n) converge a L , dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

¿En qué se traduce esto en (y_n) ?

$$n_0 = 9 \rightsquigarrow m_0 = 12 = 9 + 3$$

$\begin{matrix} n_0 & k \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$

• Si $n_0 > n_k$, $|y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq \underline{n_0 + k}$

• Si $n_0 \leq n_k$, en particular, $|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > n_k \geq n_0$
 $\Rightarrow |y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > \underline{n_k + 1} \quad n_0 = 6 \rightsquigarrow m_0 = 11$

En cualquier caso, para $\varepsilon > 0$, hemos encontrado $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que (y_n) cumple la def. de límite para L . ✓ ▢

Corolario Si (x_n) es una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, si de (x_n) eliminamos k términos cualesquiera, la sucesión resultante también converge a L .

DEM:

<u>Idea</u>	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$x_9 \dots$
	z_1		z_2	z_3			y_1	y_2	$y_3 \dots$
							z_4	z_5	$z_6 \dots$

(y_n) converge porque es (x_n) salvo un n° finito de términos al principio. (z_n) converge porque es (y_n) a la que le hemos añadido un n° finito de términos. Pero junto (z_n) es (x_n) salvo el n° finito de elem's que hemos eliminado
 $\Rightarrow$ La nueva sucesión converge a L ▢

Obs: Los resultados anteriores son también ciertos si (x_n) en lugar de ser convergente es divergente u oscilante (Probarlo)

AÑADIR O ELIMINAR UN N° FINITO DE TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN, NO ALTERA SU CARÁCTER DE CONVERGENCIA

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS LÍMITES

Lema 1 Si (x_n) converge $\Rightarrow (x_n)$ es acotada.

DEM:

Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $L \in \mathbb{R}$.

Tomando $\varepsilon = 1$ en la def. de límite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$|x_n - L| < 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Esto quiere decir que $x_n \in (L-1, L+1) \quad \forall n \geq n_0$.

"Fuera" de $(L-1, L+1)$ quedan $x_1, \dots, x_{n_0-1}$.

Consideramos el conjunto finito

$$X = \{x_1, \dots, x_{n_0-1}, L-1, L+1\},$$

que tiene máximo y mínimo, a saber, M y m .

De esta manera, tenemos que

$$m \leq x_n \leq M$$

¿Por qué?

Veamos $\circledast$. Como $M = \max X$, $L+1 \leq M$ y como

$x_n \in (L-1, L+1) \quad \forall n \geq n_0$, seguimos que $x_n < L+1 \leq M \quad \forall n \geq n_0$

Ahora, $x_1, \dots, x_{n_0} \in X \Rightarrow x_i \leq M$ para $i = 1, \dots, n_0$

$$\Rightarrow x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \checkmark$$

Ver $\circledast$ es análogo. Esto prueba que (x_n) es acotada. 

Lema 1.2 Si (x_n) converge, entonces $(|x_n|)$ es acotada. 

DEM:

Seguimos que $0 \leq |x_n|$ por el valor absoluto. cota inferior

Por el Lema 1, (x_n) es acotada y, si tomamos

$M \in \mathbb{R}$ lo suficientemente grande cota superior

$$-M \leq x_n \leq M \Rightarrow |x_n| \leq M$$

Propiedades
del valor
absoluto

↪ si la cota inferior es mayor que $-M$,

$-M$ también es cota inferior. 

Lema 2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, entonces (x_n) está acotada inferiormente, pero no superiormente.

DEM:

Por def, (x_n) diverge a $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $x_n \geq M \ \forall n \geq n_0$. Esto nos asegura que (x_n) no está acotada superiormente.

Eligiendo ahora $M=0$,

• Si $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M=0$ es cota inferior ✓

• Si no, $x_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$ y $x_1, \dots, x_{n_0-1} < 0$

Tomando $m = \min \{x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$, m es cota inferior de (x_n) . ■

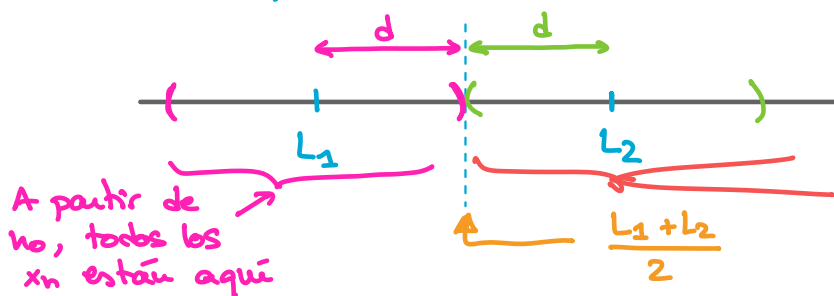
Proposición (Unicidad del límite)

Si (x_n) converge, su límite es único.

DEM:

Supongamos que $L_1 = \lim x_n$; $L_2 = \lim x_n$

con $L_1 \neq L_2$, a saber, $L_1 < L_2$.



A partir de n_0 , todos los x_n están aquí

No puede ser que todos los x_n estén aquí a partir de un n_1 , porque solo hay un n finito fuera de (L_1-d, L_1+d) .

Obs: $\frac{L_1+L_2}{2} - L_1 = \frac{L_1+L_2-2L_1}{2} = \frac{L_2-L_1}{2} > 0$

$$L_2 - \frac{L_1+L_2}{2} = \frac{2L_2-L_1-L_2}{2} = \frac{L_2-L_1}{2} > 0$$

Lo llamamos d

Fijando $\varepsilon = d$ en la def de límite para $L_1: |x_n - L_1| < d \ \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow x_n \in (L_1-d, L_1+d) \ \forall n \geq n_0$$



Ej. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

Fijado $\varepsilon > 0$, buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Pero...

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Positivo

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \leadsto \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2\sqrt{n} > \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

Si se cumple esto, automáticamente, se cumple

$$\leadsto \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

Basta tomar $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ para que para este ε , se cumpla la def de límite con $L=0$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Ej (Límite potencial) Sea $p \in \mathbb{Z}$. Demostren que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} +\infty, & p > 0 \\ 1, & p = 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

- Sea $p > 0$ Hay que ver que $x_n = n^p$ diverge a $+\infty$. Dado $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ fijo, por la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > M$. Pero como $n \leq n^2 \leq n^3 \leq \dots \leq n^p \leq \dots$

$$\Rightarrow n^p \geq n > M$$

↑ Algún elemento de la sucesión

rebasa a M ✓ Para ver que $n^p > M \forall n \geq n_0$

Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$.

$$x > y \Rightarrow x^p > y^p.$$

Usamos inducción en p .

- Caso base ($p=1$) $x > y \Rightarrow x^1 > y^1$ ✓
- Caso general Sup. que la desigualdad es cierta para $p-1$, esto es $x > y \Rightarrow x^{p-1} > y^{p-1}$.

Ahora $x > y \xRightarrow{\cdot x^{p-1} > 0} x^p = x \cdot x^{p-1} > y \cdot x^{p-1} > y \cdot y^{p-1} = y^p$
 $\Rightarrow x^p > y^p$ ✓

- Sea $p=0$ En este caso, $x_n = n^0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n = 1$
y trivialmente $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

- Sea $p < 0$.

Fijado $\varepsilon > 0$, busquemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|n^p - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n^p < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

↑ $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0 \Rightarrow n^p$ positivo.

Por el Corolario de la Prop Arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n^p \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Para este n , dados $a, b \in \mathbb{N}$

$$a < b \rightarrow n^a \leq n^b \rightarrow \frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n^b}$$

En particular, para $a=1$ y $b=-p$, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^{-p}} = n^p$

Como $p < 0$, $-p > 0$

Falta ver que a partir de este n , se cumple la desigualdad para los siguientes, pero si $n' > n \Rightarrow \frac{1}{n'} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Aplicando $(*)$ a $\frac{1}{n'} < \varepsilon \Rightarrow (n')^p \leq \frac{1}{n'} < \varepsilon$ ✓

Esto demuestra que $\forall n' \geq n, (n')^p < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^p = 0 \quad \text{si } p < 0.$$

Ej: Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & x > 1 \quad (\text{I}) \\ 1, & x = 1 \quad (\text{II}) \\ 0, & |x| < 1 \quad (\text{III}) \\ \text{Oscilante}, & x < -1 \quad (\text{IV}) \end{cases}$$

(I) Hay que ver que $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \geq M$ para todo $n \geq n_0$.

Utilizando la Desigualdad de Bernoulli.

Si $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Como nuestra $x > 1$, vamos a tomar

$$x-1 \geq -1$$

$$x^n = (1 + (x-1))^n > 1 + n(x-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$ Queremos poner $x^n \geq M$.
 "Manipulamos" n

Como esto se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular, se cumplirá si tomamos $n > \frac{M-1}{x-1}$

$$\Rightarrow x^n > 1 + n(x-1) > 1 + \frac{M-1}{x-1} \cdot (x-1) = M$$

$$\Rightarrow x^n > M \text{ para todos los } n \text{ a partir de } \frac{M-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty, \quad \text{si } x > 1 \quad \checkmark$$

(II) Si $x=1$, $x^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad \checkmark$$

(III) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, si $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$

$$\text{Si } x=0, \quad x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \checkmark$$

Suponemos entonces que $|x| < 1$, pero $x \neq 0$.

Fijamos $\varepsilon > 0$.

Era el caso " $x > 1$ "

$$|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1$$

Usando (I) sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{|x|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{|x|^n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff |x|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\uparrow$ La " M " en (I)

que es justo la definición de límite.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad \text{si } |x| < 1. \quad \checkmark$$

(iv)

$x \leq -1$

$\xrightarrow{n \text{ par}}$

$x^n \geq 1$

$\xrightarrow{n \text{ impar}}$

$x^n \leq -1$

} La sucesión no puede converger; y no puede ser $+\infty$, ni $-\infty$

$\Rightarrow$ No existe el límite de x^n si $x \leq \underline{-1}$. ✓

Aplicación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (\text{III})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-5)^n \text{ no existe (nr)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n = +\infty \quad (I)$$

Ej Demostrar que, si $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

Tomamos $0 < \varepsilon \leq 1$. Sabemos que

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n = +\infty; \quad (II) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$$

Come $x > 0$,

$$(I) \rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (1+\varepsilon)^{n_1} > x \quad \forall n \geq n_1$$

$$(II) \rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } (1-\varepsilon)^n < x \quad \forall n \geq n_2$$

El " M " de divergencia a $+\infty$

$> x \quad \forall n \geq n_1$

$x \quad \forall n \geq n_2$

El " ε " de la convergencia

Si tomamos $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$, $\forall n \geq n_0$, se cumplen ambas:

$$(1-\varepsilon)^n < x < (1+\varepsilon)^n$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < 1 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - 1 < \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{x} - 1| < \varepsilon \quad \forall n \gg n_0$$

Esto es la definición de $\lim \sqrt[n]{x} = 1$, pero habíamos tomado $0 < \underline{\varepsilon} \leq 1$, y tiene que funcionar $\forall \varepsilon' > 0$.
Pero tomando $\varepsilon' > 1$, Tomando $\varepsilon = 1$

$$|\sqrt[n]{x} - 1| < 1 < \varepsilon' \quad \forall n \geq n_0 \quad \checkmark$$

OPERACIONES CON SUCESIONES Y LÍMITES

Def Sean $(x_n), (y_n)$ ds sucesiones. Definimos:

- $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$
- $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$
- $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ siempre que $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición Supongamos que (x_n) e (y_n) son sucesiones convergentes con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L, \quad K, L \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + (y_n) = K + L$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \cdot (y_n) = K \cdot L$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)}{(y_n)} = \frac{K}{L}$ si $L \neq 0$.

DEM: Como ambas sucesiones convergen, $\forall \varepsilon > 0$, ^(*)

(A) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq. $|x_n - K| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

(B) $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tq. $|y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

↑ En realidad sirve para

Además, si llamamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, cualquier expresión se dan (A) y (B) $\forall n \geq n_0$. fija > 0

(i) Dado $\delta/2 > 0$, en $(*)$,

$$|x_n + y_n - (K+L)| \stackrel{D.T.}{=} |x_n - K + y_n - L| \leq |x_n - K| + |y_n - L|$$

(A), (B) con $\delta/2$ en $(*)$ $\rightarrow < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Esto es la def. de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + (y_n) = K + L \quad \checkmark$$

(ii) Como (x_n) es convergente, sabemos que $(|x_n|)$ es acotada digamos por $M \in \mathbb{R}^+$, es decir, $|x_n| < M$.

• Tomando $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ en $(*)$, $|x_n - K| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_1$

• Tomando $\frac{\varepsilon}{2|L|} > 0$ en $(*)$, $|y_n - L| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |L|} \quad \forall n \geq n_2$

$L = \lim y_n$

Ahora,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - KL| &= |x_n y_n - x_n L + x_n L - KL| \\ &\stackrel{D.T.}{\leq} |\underbrace{x_n y_n - x_n L}_{\text{pink}}| + |\underbrace{x_n L - KL}_{\text{green}}| \\ &= |x_n \cdot (y_n - L)| + |L \cdot (x_n - K)| \\ |xy| &= |x| \cdot |y| \rightarrow \\ &= |x_n| \cdot |y_n - L| + |L| \cdot |x_n - K| \\ &< \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{M}} + \cancel{|L|} \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \cancel{|L|}} = \varepsilon \quad \forall n \geq \underbrace{n_0}_{\max\{n_1, n_2\}} \end{aligned}$$

Esto es la def. de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)(y_n) = K \cdot L.$$

¿Y si en $\otimes$ tenemos $L=0$? ¡No podemos hacer $\frac{\varepsilon}{2L}$!

Estudiamos este caso aparte. en (B) tendríamos $|y_n| < \varepsilon$.

Pero tomando $\varepsilon/M > 0$ en $\otimes$, $|y_n| < \varepsilon/M \quad \forall n \geq n_2$. Así,

$$|x_n y_n - \overset{0, \text{ pues } L=0}{KL}| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \checkmark$$

(iii)

Demostremos primero que si (y_n) converge a L , con $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $L \neq 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{L}$$

$\cdot (-1)$ dentro

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - y_n}{y_n L} \right| = \frac{|L - y_n|}{|y_n| \cdot |L|} = \frac{|y_n - L|}{|L|} \cdot \frac{1}{|y_n|}$$

Pero $y_n \neq 0 \Rightarrow |y_n| > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}^+$ con $|y_n| > m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{m}$$

Tomando $\varepsilon \cdot |L| \cdot m > 0$ en $\otimes$,

$$\frac{|y_n - L|}{|L|} \cdot \frac{1}{|y_n|} < \frac{\varepsilon \cdot \cancel{|L|} \cdot \cancel{m}}{\cancel{|L|}} \cdot \frac{1}{\cancel{m}} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$$

Esto demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{L}$.

Para ver ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{K}{L}$, usamos la propiedad (ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = K \cdot \frac{1}{L} = \frac{K}{L} \quad \checkmark$$



LÍMITES Y DESIGUALDADES

Notación Dada una sucesión (x_n) diremos que cumple cierta condición para n lo suficientemente grande si tal condición se cumple $\forall n \geq n_0$, a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.

Ej Decimos que $2^n > n^2$ para n lo suficientemente grande porque se cumple $\forall n \geq 4 \leftarrow n_0$

Prop (D1) Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones convergentes con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L.$$

Si $x_n \leq y_n$ para n suficientemente grande $\Rightarrow K \leq L$.

DEM:

Como hay convergencia, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } |x_n - K| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1 \rightsquigarrow -\varepsilon < x_n - K < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } |y_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2 \rightsquigarrow -\varepsilon < y_n - L < \varepsilon$$

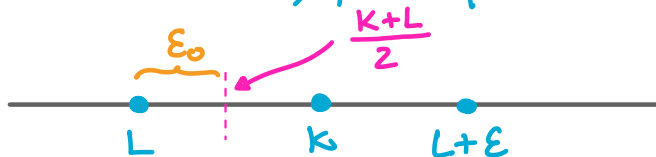
Queremos ver que $K \leq L$:

$$K = \underbrace{x_n}_{\leftarrow y_n \text{ para } n \geq n_1} - (x_n - K) \leq y_n - (x_n - K) < \underbrace{y_n}_{\leftarrow L} + \frac{\varepsilon}{2} < \underbrace{L + \frac{\varepsilon}{2}}_{\leftarrow L} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow K < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\checkmark \quad \Rightarrow K \leq L \quad \checkmark$$

Sup. que $K < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, pero que $K > L$,



$$\text{Tomando } \varepsilon_0 = \frac{K+L}{2} - L \Rightarrow L + \varepsilon_0 = \frac{K+L}{2} = \frac{K}{2} + \frac{L}{2} < \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K$$

$$\Rightarrow L + \varepsilon_0 < K \quad \textcircled{\#} \text{ ¡Contradicción!}$$

Sean $(x_n), (y_n)$ sucesiones convergentes con
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$

¿ $K \leq L \Rightarrow x_n \leq y_n$ para n suf. grande? No

Consideramos

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad y_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow x_n > y_n$$

Sin embargo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \xrightarrow{K}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{n}) = 0 \xrightarrow{L}$ $K \leq L$

¿ $x_n < y_n$ para n suf. grande $\Rightarrow K < L$? No

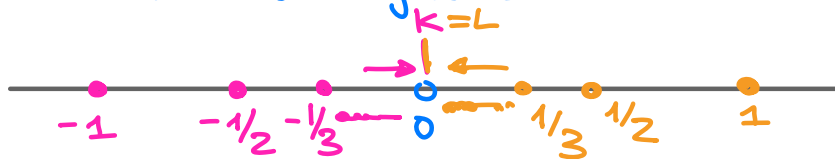
Tomando ahora

$$x_n = -\frac{1}{n}; \quad y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n < y_n$$

Pero

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{n}) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = L \Rightarrow K = L$$

Esto nos dice que aunque haya una desigualdad estricta entre los términos de dos sucesiones, al hacer límites, se pueden "convertir" en igualdad



Corolario (D2) Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones no oscilantes y tales que $x_n \leq y_n$ para n lo suficientemente grande.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K, \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq K$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L, \quad L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L$$

DEM:

(1) Como (y_n) no es oscilante, hay dos posibilidades:

- (y_n) es divergente. Como x_n converge, existe $m \in \mathbb{R}$ con $m \leq x_n \leq y_n$ para n suf. grande.

Esto nos dice que, en caso de que (y_n) diverja, debe hacerlo a $+\infty$, pues m es cota inferior a partir de un punto.

En este caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \geq K \text{ es trivial.}$$

- (y_n) convergente. Por la Prop. (D1),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq K \checkmark$$

(2) Es análogo a (1)



Lo que nos dice este corolario es que una acotación entre elementos de dos sucesiones se traduce en una acotación entre sus límites, converjan o diverjan.

Teorema (del Sandwich) Sean $(x_n), (y_n), (z_n)$ tres sucesiones con:

1- $x_n \leq y_n \leq z_n$ para n lo suf. grande.

2- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

Entonces (y_n) converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$

DEM:

$$x_n \leq y_n \leq z_n \xrightarrow{\text{Gr. (D2)}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} L \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq L$$

$\Rightarrow$ Necesariamente (y_n) converge a L $\checkmark$



Ej Calcular:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n)}{n}$

Anotamos la sucesión:

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{-1}{n}}_{x_n} \leq \underbrace{\frac{\sin(2n)}{n}}_{y_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\uparrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $\uparrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

Th. Sandwich
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n)}{n} = 0$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1}$

Si el denom. es más pequeño,
el cociente es más grande

$$0 \leq \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{y_n} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{z_n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Th. Sandwich.
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$$0 \leq \underbrace{\frac{1+\cos n}{n^2}}_{y_n} \leq \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Th. Sandwich
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\cos n}{n^2} = 0$$

APLICACIÓN DEL T. DEL SÁNDWICH: APROXIMACIÓN DE $\sqrt{p}$

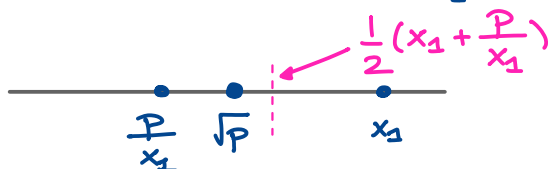
Consideremos $p \in \mathbb{R}^+$ cualquiera. Vamos a construir una sucesión que converja a $\sqrt{p}$. Para ello, comenzamos con un valor inicial $x_1 \in \mathbb{R}^+$, que aproxime $\sqrt{p}$. Observamos que

$$x_1 \cdot \frac{p}{x_1} = p$$

- Si $x_1 < \sqrt{p}$, necesariamente $\frac{p}{x_1} > \sqrt{p}$, pues de otro modo

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < \sqrt{p} \\ \frac{p}{x_1} < \sqrt{p} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 \cdot \frac{p}{x_1} < (\sqrt{p})^2 \Rightarrow p < p \quad (\#)$$

- Del mismo modo, si $x_1 > \sqrt{p} \Rightarrow \frac{p}{x_1} < \sqrt{p}$.



Una nueva aproximación mejor que x_1 puede ser el punto medio de x_1 y $\frac{p}{x_1}$, así que definimos

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{p}{x_1} \right)$$

Utilizando la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética, que nos dice que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, aplicada a x_1 y $\frac{p}{x_1}$:

$$\sqrt{x_1 \cdot \frac{p}{x_1}} \leq \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{p}{x_1} \right) \Rightarrow \sqrt{p} \leq x_2 \Rightarrow \sqrt{p} \geq \frac{p}{x_2} \quad \leftarrow \text{Como antes.}$$

Podemos volver a conseguir una mejor aprox. de $\sqrt{p}$ que x_2 , tomando el punto medio de x_2 y $\frac{p}{x_2}$:

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{x_2} \right)$$

Haciendo esto consecutivamente, obtenemos una sucesión definida por recurrencia, cuyo primer término es x_1 y los siguientes:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Vamos a estudiar su convergencia, usando el error que cometemos en el paso n -ésimo:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - \sqrt{p} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right) - \sqrt{p} \quad \text{Ident. not.} \\
 &= \frac{x_n^2 + p - 2x_n\sqrt{p}}{2x_n} \\
 &= \frac{(x_n - \sqrt{p})^2}{2x_n}
 \end{aligned}$$

La derig. geom-aritm. nos

asegura que $\sqrt{p} \leq x_n$

$$\Rightarrow \frac{x_n - \sqrt{p}}{x_n} = 1 - \frac{\sqrt{p}}{x_n} \leq 1$$

Aplicando lo mismo a $x_n - \sqrt{p}$

Y ahora a $x_{n-1} - \sqrt{p}$ y $x_{n-2} - \sqrt{p}, \dots, x_2 - \sqrt{p}$
(son en total n aplicaciones desde $x_{n+1} - \sqrt{p}$)

$$= \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{p}) \cdot \left(\frac{x_n - \sqrt{p}}{x_n} \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{p})$$

$\vdots$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x_{n-1} - \sqrt{p}) = \frac{1}{2^2} (x_{n-1} - \sqrt{p})$$

$\vdots$

$$\leq \frac{1}{2^n} (x_1 - \sqrt{p})$$

n pasos $\swarrow$ Nos concretos.

Hemos llegado a que Derig. geom-aritm.

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{p} \leq \left(\frac{1}{2^n} \right) (x_1 - \sqrt{p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

Por el Teorema del Sandwich,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - \sqrt{p}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = \sqrt{p} \quad \checkmark$$

Ej Para aproximar $\sqrt{5}$, definimos

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right) \end{cases}$$

Los 10 primeros términos, calculados con 25 decimales, son:

$$x_1 = 2.000000000000000000000000$$

$$x_2 = 2.250000000000000000000000$$

$$x_3 = 2.236111111111111111111111$$

$$x_4 = 2.2360679779158040027605245$$

$$x_5 = 2.2360679774997896964478728$$

$$x_6 = 2.2360679774997896964091737$$

$$x_7 = 2.2360679774997896964091737$$

$$x_8 = 2.2360679774997896964091737$$

$$x_9 = 2.2360679774997896964091737$$

$$x_{10} = 2.2360679774997896964091737$$

← ¡A partir de x_6 ya hay 25 decimales exactos!

⚠ Este método nos permite aproximar cualquier n° real (positivo) a partir de números racionales: basta tomar $x_1 \in \mathbb{Q}$.

APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL SÁNDWICH: CONVERGENCIA DE $\sqrt[n]{n}$

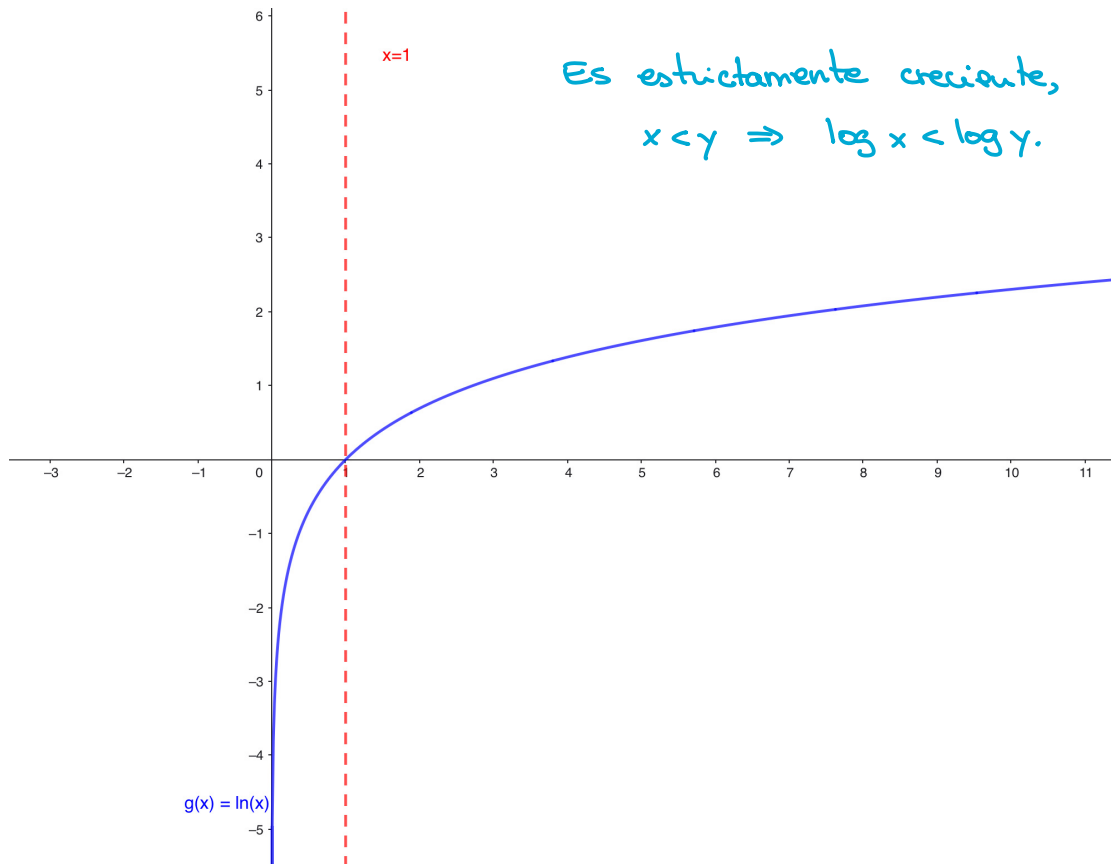
Ej Demostren que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Lema. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x < y \Leftrightarrow \log_b x < \log_b y, \quad b > 1$$

DEM:

Si observamos la gráfica de $g(x) = \log x$, donde "log" es "logaritmo neperiano":



De otro modo,

$$x < y \Rightarrow \frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \log \frac{y}{x} > 0 \Rightarrow \log y - \log x > 0$$

$$\Rightarrow \log y > \log x \quad \checkmark$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Llamamos $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Por las propiedades de los límites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Basta entonces demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

COTA INFERIOR

$$x_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1$$

Lema $n \geq 1 \Rightarrow \log n \geq \log 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log \sqrt[n]{n} \geq \log 1 \Leftrightarrow \frac{\log n}{n} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$x_n \geq 0$$

COTA SUPERIOR

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Leftrightarrow x_n + 1 = \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow (x_n + 1)^n = n$$

Binomio de Newton.
con $x = 1$
 $y = x_n$

BINOMIO DE NEWTON

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-(n-1)} y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Obs: $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

En general, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\Rightarrow n = \binom{n}{0} 1^n x_n^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} x_n^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} x_n^2 + \dots \text{ otros sumandos positivos}$$

$$\Rightarrow n = 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \dots \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow \frac{n \cdot 2}{n(n-1)} \geq x_n^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n$$

Tenemos acotado así,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por el Teorema del Sándwich,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

SUCESIONES MONÓTONAS

Def (Sucesión monótona) Sea (a_n) una sucesión decimos que es:

- Creciente si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ↓ Cada término es menor o igual que el siguiente
- Estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Decreciente si $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ↖ Cada término es mayor o igual que el siguiente.
- Estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En cualquiera de los casos anteriores, decimos que (a_n) es monótona.

Ej Estudiar la monotonía de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$a_n = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$ Parece creciente.

$1 - \frac{1}{1} \quad 1 - \frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}$

Vamos a demostrarlo

$$\begin{aligned} n < n+1 &\rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \rightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} \\ &\rightarrow \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} > \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{a_n} \rightarrow a_{n+1} > a_n \end{aligned}$$

↑
Cada térm. es mayor que el anterior.

$\Rightarrow (a_n)$ es estrictamente creciente.

b) $b_n = n^2$

Claramente $b_n = n^2 < (n+1)^2 = b_{n+1} \rightarrow b_n < b_{n+1}$

$\Rightarrow (b_n)$ es estrictamente creciente.

c) $c_n = (-1)^n$ para $n=0, 1, 2, \dots$

$c_0 = (-1)^0 = 1 \xrightarrow{\text{Decrece}} c_1 = (-1)^1 = -1 \xrightarrow{\text{Crece}} c_2 = (-1)^2 = 1$

$\Rightarrow (c_n)$ no es monótona.

d) $d_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Vimos que esta sucesión es

$$\left(1, \overset{D}{\frac{1}{2}}, \overset{D}{-\frac{1}{2}}, \overset{D}{-1}, \overset{C}{-\frac{1}{2}}, \overset{C}{\frac{1}{2}}, \overset{C}{1}, \overset{D}{\frac{1}{2}}, \dots\right)$$

$\Rightarrow (d_n)$ no es monótona.

e) $e_n = \frac{1}{n^2}$

$$n < n+1 \rightarrow n^2 < (n+1)^2 \rightarrow \overset{e_n}{\frac{1}{n^2}} > \overset{e_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \rightarrow e_n > e_{n+1}$$

$\Rightarrow (e_n)$ es estrictamente decreciente

f) Sucesión de Fibonacci

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

Probamos por inducción que es creciente.

• Caso base ($n=3$)

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f_3 \geq f_2 \geq f_1 \checkmark$$

• Caso general.

- Hipótesis: Suponemos que es creciente hasta f_n :

$$f_n \geq f_{n-1} \geq f_{n-2} \geq \dots$$

- Tesis: Veamos que $f_{n+1} \geq f_n$:

Def. de la sucesión $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq f_{n-1} + f_{n-2} = f_n \Rightarrow f_{n+1} \geq f_n \checkmark$

$\Rightarrow$ La sucesión de Fibonacci es creciente.

MONOTONÍA Y CONVERGENCIA

Teorema Si (x_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces converge.

DEM. Como (x_n) es acotada superiormente, por el Axioma de Completitud, existe $s = \sup x_n$. Así, para todo $\varepsilon > 0$,

$$s - \varepsilon < x_{n_0} \leq s \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N}$$

↑ Si no "se colara" un término de la sucesión aquí, s no sería la menor cota superior.

Pero como (x_n) es creciente, de hecho,

$$s - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s < s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow s - \varepsilon \leq x_n \leq s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq x_n - s \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |x_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Por tanto, (x_n) converge a su supremo. 

Teorema 2 Si (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces (x_n) es convergente (y converge a su ínfimo).

MONÓTONA + ACOTADA = CONVERGENTE

Ej. Probar que las siguientes sucesiones convergen y hallar su límite.

$$a) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} \stackrel{(*)}{=} 1 + \frac{x_n}{2}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Si la sucesión converge a un límite $L \in \mathbb{R}$, se cumplirá que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$$

↑ Es la misma sucesión "adelantada" una posición

Tomando límites en $(*)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{2}\right) \Rightarrow L = 1 + \frac{L}{2} \quad \leftarrow \text{Si el límite existe, debe cumplir esto}$$

$$\overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2L = 2 + L \Rightarrow \boxed{L=2}$$

⚠ Esto no quiere decir que exista el límite, pero sí que si existe es $L=2$. Vamos a demostrar que hay convergencia.

ACOTACIÓN

Como $x_1=1$ y el posible límite es $L=2$, veamos que la sucesión está acotada superiormente por 2 usando inducción.

Caso base ($n=1$)

$$x_1 = 1 \leq 2 \quad \checkmark$$

Caso general Suponemos que $x_n \leq 2$ (hipótesis). ¿ $x_{n+1} \leq 2$?

$$\boxed{x_{n+1}} \stackrel{(*)}{=} 1 + \frac{\boxed{x_n}}{2} \stackrel{\text{HIP.}}{\leq} 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = \boxed{2} \quad \checkmark$$

MONOTONÍA

Como $x_1=1$ y el posible límite es $L=2$, podemos tratar de probar que x_n es creciente también por inducción.

Caso base ($n=1$)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 + \frac{x_1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 + \frac{x_1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow x_2 \geq x_1 \quad \checkmark$$

Caso general Supongamos que $x_n \geq x_{n-1}$ (hipótesis) ¿ $x_{n+1} \geq x_n$?

$$\boxed{x_{n+1}} \stackrel{(*)}{=} 1 + \frac{\boxed{x_n}}{2} \stackrel{>}{\geq} 1 + \frac{x_{n-1}}{2} \stackrel{(*)}{=} \boxed{x_n} \quad \checkmark$$

Conclusión (x_n) es una sucesión monótona y acotada, por lo que es convergente y su límite es $L=2$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

EL NÚMERO e

Consideramos la sucesión definida por

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Vamos a demostrar que converge, comprobando que es monótona y acotada. Primero, para hacernos una idea, calculamos algunos términos de la sucesión:

Los primeros son:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2.000 \\ e_2 &= 2.250 \\ e_3 &= 2.370 \\ e_4 &= 2.441 \\ e_5 &= 2.488 \\ e_6 &= 2.521 \\ e_7 &= 2.546 \\ e_8 &= 2.565 \\ e_9 &= 2.581 \\ e_{10} &= 2.593 \end{aligned}$$

Y, si avanzamos más en la sucesión,

$$\begin{aligned} e_{100} &= 2.704 \\ e_{1000} &= 2.716 \\ e_{10000} &= 2.718 \end{aligned}$$

Parece que la sucesión es creciente...

MONOTONÍA Para probar que (e_n) es creciente, usamos la desigualdad entre la media aritmética y geométrica generalizada:

Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

DESIGUALDAD A-G

Vamos a usarla con los números

$$\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, 1}_{(n+1) \text{ valores.}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{geom}]{\text{Media}} \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 &= n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = n + 1 + 1 \\ &= n + 2 \xrightarrow[\text{aritm}]{\text{Media}} \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Desig. A-G} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n+1]{\text{Elevamos a}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{e_n} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e_{n+1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (e_n)$ es creciente ✓

ACOTACIÓN Hay que ver que (e_n) está acotada superiormente. Para ello, usamos una sucesión auxiliar:

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Calculando algunos términos,

$$\begin{aligned} f_1 &= 4.000 \\ f_2 &= 3.375 \\ f_3 &= 3.161 \\ f_4 &= 3.052 \\ f_5 &= 2.986 \\ f_6 &= 2.942 \\ f_7 &= 2.911 \\ f_8 &= 2.887 \\ f_9 &= 2.868 \\ f_{10} &= 2.854 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{100} &= 2.732 \\ f_{1000} &= 2.720 \\ f_{10000} &= 2.719 \end{aligned}$$

Parece que esta sucesión es decreciente. Vamos a probarlo, usando de nuevo la desig. A-G

con

$$1 - \frac{1}{n}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{geom}]{\text{Media}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = n \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = n - 1 + 1 = n \xrightarrow[\text{arit}]{\text{Media}} \frac{n}{n+1}$$

Desig AG

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{n}{n+1} \xrightarrow[\text{n+1}]{\text{Elev. a}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\xrightarrow{1/\dots} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$\uparrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$
 $\uparrow +1-1$
 $\uparrow$ separar en dos sumandos

$$\rightarrow \left(1 + \frac{n}{n-1} - 1\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}_{f_{n-1}} \geq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{f_n}$$

$\uparrow \frac{n-(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow (f_n)$ es decreciente.

Además, como $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ y ambos tienen la misma base, que es mayor que 1, $f_n \geq e_n$. Así,

$$e_n \leq f_n \leq f_1 = 4 \Rightarrow (e_n) \text{ acotada superiormente}$$

$\uparrow$ Para todo n

CONCLUSIÓN

Como (e_n) es creciente y acotada, es convergente y, de hecho, definimos:

Definición (Número e) El número real que es límite de (e_n) se llama número e .

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

APLICACIÓN LÍMITES DE $\frac{n!}{n^n}$ y $\sqrt[n]{n!}$.

Finalidad: Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

Ej Demostrar que

$$2^{n-1} \cdot n! \stackrel{(I)}{\leq} n^n \stackrel{(II)}{\leq} e^{n-1} \cdot n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

(I) Utilizamos inducción en n :

• Caso base ($n=1$)

$$2^{1-1} \cdot 1! = 2^0 \cdot 1 = 1 \leq 1 = 1^1 \quad \checkmark$$

• Caso general

Suponemos que $\underline{2^{n-1} \cdot n! \leq n^n}$ ¿ $2^n \cdot (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$?

Obs: Sabemos que la sucesión

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ es creciente y } e_1 = 2.$$

En part, esto nos dice que $2 = e_1 \leq e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$2^n \cdot (n+1)! = \underbrace{2^{n-1} \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot n!}_{\text{orange box}} \leq 2(n+1) \cdot n^n \leq (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{n+1} \quad \checkmark$$

Afirmamos que $2 \cdot n^n \leq (n+1)^n$:

$$\underbrace{2n^n \leq (n+1)^n}_{\checkmark} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{(n+1)^n}{n^n} \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow 2 \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{e_n}$$

✓ por la Obs

$$(II) \quad n^n \leq e^{n-1} \cdot n!$$

• Caso base: ($n=1$)

$$1^1 = 1 \leq 1 = e^0 \cdot 1 = e^{1-1} \cdot 1!$$

• Caso general

Suponemos que $n^n \leq e^{n-1} \cdot n!$ ¿ $(n+1)^{n+1} \leq e^n \cdot (n+1)!$?

Obs 2: $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es creciente y acotada superiormente, por lo que tiende a su supremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$e_n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por ser e el supremo

$$e^n \cdot (n+1)! = e^{n-1} \cdot e \cdot (n+1) \cdot n! \geq e \cdot (n+1) \cdot n^n \quad (\text{cota superior})$$

$$\geq (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{n+1} \quad \checkmark$$

Afirmamos que $e \cdot n^n \geq (n+1)^n$

$$e \cdot n^n \geq (n+1)^n \Leftrightarrow e \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} \Leftrightarrow e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e \geq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{e_n}$$

✓ Por la Obs 2

Ej: Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Dividiendo por $n!$ en la desigualdad anterior:

$$2^{n-1} \leq \frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{n!}{n^n} \geq \frac{1}{e^{n-1}} \quad \lim x^n = 0 \text{ si } |x| < 1$$

Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \cdot 2^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_0 = 0$

Del mismo modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n-1}} = 0$$

$$0 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{n!}{n^n} \geq \frac{1}{e^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por el T. del Sándwich,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \checkmark$$

Ej: Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

Utilizamos la desigualdad (II) anterior:

$$n^n \leq e^{n-1} \cdot n! \xRightarrow{\sqrt[n]{}} n \leq e^{\frac{n-1}{n}} \sqrt[n]{n!} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{e^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{n}{e \cdot e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{n \cdot e^{\frac{1}{n}}}{e} \Rightarrow \frac{n}{e^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt[n]{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot \sqrt[n]{e}}{e} \leq \sqrt[n]{n!}$$

$\lim \sqrt[n]{x} = 1$ para $x \in \mathbb{R}^+$

Pero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt[n]{e}}{e} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e}}{\lim_{n \rightarrow \infty} e} = +\infty$$

↪ Tenemos $\sqrt[n]{n!}$ acotada inferiormente por una sucesión que diverge a $+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

SUBSUCESIONES

Idea: Una subsucesión de (x_n) es una sucesión "sacada" de los términos de (x_n) , respetando el orden correlativo.

Ej Si $x_n = \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$

Algunas subsucesiones son:

• Términos pares $\rightsquigarrow$ $\overset{x_2}{\frac{1}{2}}, \overset{x_4}{\frac{1}{4}}, \overset{x_6}{\frac{1}{6}}, \dots = (x_{2k})_{k=1}^{\infty}; x_{2k} = \frac{1}{2k}$

• Potencias de 2 $\rightsquigarrow (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots) = (x_{2^k}); x_{2^k} = \frac{1}{2^k} \quad k \geq 0$

• Denom. primos $\rightsquigarrow \overset{x_2}{\frac{1}{2}}, \overset{x_3}{\frac{1}{3}}, \overset{x_5}{\frac{1}{5}}, \overset{x_7}{\frac{1}{7}}, \dots = (x_n)_{n \text{ primo}}$

Def (Subsucesión) Sea (x_n) una sucesión. Una subsucesión de (x_n) es $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ donde $x_{n_k} = x_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

Se respeta el orden correlativo.

Los términos de la subsucesión son algunos de la sucesión.

Lema Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) . Entonces

$$n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

DEM: Hacemos inducción en k .

• Caso base: ($k=1$) $n_1 \geq 1$ porque n_1 es el primer índice de la subsucesión ✓

• Caso general Sup. que $n_k \geq k$ ¿ $n_{k+1} \geq k+1$?

$n_{k+1} > n_k \overset{\text{Hip}}{\geq} k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1. \checkmark$

Por def. de subsucesión $\uparrow$



Prop Si (x_n) converge a $L \in \mathbb{R}$, entonces cualquier subsucesión suya también converge a L .

DEM: Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) . Por el Lema anterior,

$n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Pero si $k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq n_0$, por lo que tenemos que

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon \quad \forall n_k \geq n_0$$

$\Rightarrow (x_{n_k})$ converge a L



Corolario (Criterio de no convergencia) Sea (x_n) una sucesión

y sean (x_{n_k}) y (x'_{n_k}) dos subsucesiones distintas con

$$\lim x_{n_k} \neq \lim x'_{n_k}$$

Entonces, (x_n) no es convergente.

DEM: Si (x_n) convergiera a $L \in \mathbb{R}$, toda subsucesión convergería

a L , por la Prop. anterior, lo cual contradice la hipótesis

$$\lim x_{n_k} \neq \lim x'_{n_k}.$$



Ej Dada $x_n = (-1)^n$, probar que no converge.

Subsuc. de términos pares: $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \rightarrow \lim x_{2k} = 1$

————— " ————— impares: $x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \rightarrow \lim x_{2k+1} = -1$

Como hemos encontrado dos subsuc. distintas con límites diferentes, x_n no es convergente.

 Que encontremos dos subsuc. con límites distintos, no nos dice que la sucesión no tenga límite, sino que no converge (puede ser divergente). Por ejemplo, definimos

Términos

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{si } n = 3k-2 \quad 1, 4, 7, 10, \dots \\ 1, & \text{si } n = 3k-1 \quad 2, 5, 8, 11, \dots \\ -1, & \text{si } n = 3k \quad 3, 6, 9, 12, \dots \end{cases}$$

$$x_n = (\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{-1}, \overset{4}{4}, \overset{5}{1}, \overset{6}{-1}, \overset{7}{7}, \overset{8}{1}, \overset{9}{-1}, \overset{10}{10}, \dots)$$

Consideramos las subsucesiones de los términos de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} x_{3k-1} = 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{3k-1} = 1 \\ x_{3k} = -1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{3k} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \text{ no converge}$$

Sin embargo, como los términos de índice $n=3k-2$ crecen indefinidamente, x_n no está acotada superiormente y, de hecho,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ↑ CERTO. ¡FALSO! No cumple la def. de divergencia!

— TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS PARA SUCESIONES —

Def (Término dominante) Sea (x_n) una sucesión. Decimos que un término de la sucesión, a saber x_{n_0} , es dominante si es mayor o igual que todos los términos que van tras él, esto es, si

$$x_{n_0} \geq x_n \quad \forall n > n_0.$$

Obs: Si (x_n) es decreciente, todos los términos son dominantes; y si es estrictamente creciente, ninguno lo es. En realidad, una sucesión puede tener un n° arbitrario de términos dominantes.

Teorema (de la subsucesión monótona)

Toda sucesión (x_n) tiene una subsucesión monótona.

DEM:

• Supongamos que (x_n) tiene infinitos términos dominantes. Si consideramos la subsucesión (x_{n_k}) donde los elementos son los términos dominantes, cumplirá que

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (x_{n_k})$ es una subsucesión decreciente de (x_n) ✓

• Supongamos ahora que (x_n) tiene un n° finito de términos dominantes, de modo que el último término dominante tiene índice N . (Si no hay ningún término dominante, fijamos $N=1$).

Elegimos $n_1 > N$. Como x_{n_1} no es dominante, existe

$n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. ← Caso base de inducción.

Caso general $\rightarrow$ Supongamos que hemos encontrado $n_1, \dots, n_{k-1}$ índices con

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} \quad \text{y} \quad x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_{k-1}}$$

Como $x_{n_{k-1}}$ no es dominante, existe $n_k > n_{k-1}$ con

$$x_{n_{k-1}} < x_{n_k}$$

$$\Rightarrow n_1 < \dots < n_{k-1} < n_k \quad \text{y} \quad x_{n_1} < \dots < x_{n_{k-1}} < x_{n_k}$$

Construimos así, por inducción, una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que es creciente. $\checkmark$ 

Obs: Las subsucesiones construidas en la dem. anterior no tienen porqué ser únicas.

Teorema (Bolzano-Weierstrass para sucesiones) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

DEM:

Como (x_n) tiene una subsucesión monótona, a saber, (x_{n_k}) y (x_n) es acotada, (x_{n_k}) también lo es.

$\Rightarrow (x_{n_k})$ es convergente. 

La fuerza de este teorema, que no nos da el valor de un límite de (x_n) acotada, pero nos dice que hay un candidato, al menos, a ese límite: al que converge la subsucesión.

Como la sucesión no puede "escapar" de ciertas fronteras (pues está acotada) y una subsucesión tiene límite, nos dice que infinitos términos "visitan los alrededores" de ese límite. Es algo así como un punto de acumulación de elementos de la sucesión. Por ejemplo,

$$x_n = \sin n \quad \text{sabemos que está siempre en } [-1, 1]$$

y el T. de B-W, nos dice que existe una subsucesión (x_{n_k}) con

$$\lim x_{n_k} = L \in [-1, 1],$$

así que (x_n) "se mueve cerca de ese L " aunque no sepamos cuál es.

TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS: EJEMPLOS

Teorema (Bolzano-Weierstrass para sucesiones) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Ej Sea (x_n) una sucesión real acotada de modo que cualquier subsucesión suya converge a $L \in \mathbb{R}$. Demosttar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L. \quad (\#) \text{ Cautod}$$

Supongamos que (x_n) no converge a L . Para un $\varepsilon_0 > 0$ fijado,

$$(*) \quad |x_n - L| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \geq n_0, \text{ para } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Pero como (x_n) es acotada, por el T. de Bolzano-Weierstrass, existe segun una subsucesión (x_{n_k}) convergente y, por hipótesis converge a L . Esto es, para el ε_0 anterior se tiene que

$$(\#) \quad |x_{n_k} - L| < \varepsilon_0 \quad \forall k \geq k_0, \quad k_0 \in \mathbb{N}$$

(*) A partir de n_0 , todos los términos de (x_n) están a distancia $\geq \varepsilon_0$ de L .

(\#) A partir de n_{k_0} , todos los términos de (x_{n_k}) , que son infinitos términos de (x_n) , están a distancia $< \varepsilon_0$ de L

(*) y (\#) se contradicen $\Rightarrow$ Una es falsa. ¿Cuál?

(\#) es cierta por hipótesis $\Rightarrow$ (*) es falsa

(x_n) converge a L . ✓

Ej Sea (x_n) una sucesión y sea el conjunto

$$S_\varepsilon = \{ n : |x_n - L| < \varepsilon \}$$

con $\varepsilon > 0$ y algún $L \in \mathbb{R}$.

Demosttar que, si (x_n) es acotada, existe $L \in \mathbb{R}$ talque S_ε es un conjunto infinito para todo $\varepsilon > 0$.

Como (x_n) es acotada, por el **T. de Bolzano-Weierstrass**, tiene una subsucesión convergente, a saber, (x_{n_k}) con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = L \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

En este caso, $S_\varepsilon = \{n_{k_0}, n_{k_0+1}, n_{k_0+2}, \dots\}$ es infinito y, como es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$, queda probado ✓

Ej Demostrar que una sucesión (x_n) no tiene ninguna subsucesión convergente si, y solo si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, para $M \in \mathbb{R}$ fijado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$|x_n| \geq M \quad \forall n \geq n_0$$

Si (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) , podemos elegir k tal que

$$n_k \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_k}| \geq M \quad \forall n_k \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n_k} \geq M \\ x_{n_k} \leq -M \end{cases} \quad \forall n_k \geq n_0 \Rightarrow (x_{n_k}) \text{ no converge.}$$

$\Rightarrow (x_n)$ no tiene ninguna subsucesión convergente.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \neq +\infty$. **FALSO** Entonces, para cierto $M \in \mathbb{R}^+$

tendremos que $|x_n| < M$ para $n \geq n_0$, para un $n_0 \in \mathbb{N}$. En

particular existe $n_1 > 1$ con $|x_{n_1}| < M$. Existirá también

$n_2 > n_1 \geq n_0$ con $|x_{n_2}| < M$. De esta forma, construiremos una subsucesión de (x_n) , a saber, (x_{n_k}) que cumple que

$$|x_{n_k}| < M \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

esto es (x_{n_k}) es acotada. Pero por el **T. Bolzano-Weierstrass**,

esta sucesión tendrá una subsucesión convergente, que también

es subsucesión convergente de (x_n) . ¡Contradicción!

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty.$$

EJERCICIO Demostar que una sucesión (x_n) es acotada si, y solo si toda subsucesión de (x_n) tiene una subsucesión convergente

$\Rightarrow$ Como (x_n) es acotada, cualquier subsucesión (x_{n_k}) suya también lo será y, por el T. de Bolzano-Weierstass, (x_{n_k}) tiene una subsucesión convergente. ✓

$\Leftarrow$ Sup. que toda subsucesión de (x_n) tiene una subsucesión convergente, pero que (x_n) no es acotada. En este caso, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que ^{FALSO} no es acotada, esto es, $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k}| = +\infty$ y, por el ejercicio anterior, (x_{n_k}) no puede tener una subsuc. convergente. $\#$

$\Rightarrow (x_n)$ es acotada. ✓

LIMSUP Y LIMINF

Recordemos esta proposición:

Prop Sea (x_n) una sucesión convergente

con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = K$; y sea $a \in \mathbb{R}$.

Si $x_n \leq a$ para n suficientemente grande $\Rightarrow K \leq a$

De igual modo, si $x_n \geq b$, para $b \in \mathbb{R} \Rightarrow K \geq b$

En particular, podemos decir que si (x_n) es convergente y $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $b \leq x_n \leq a$ para n suf. grande, entonces

$$K \in [b, a]$$

Por otra parte, si (x_n) es acotada, puede ser convergente o no. Esto depende de los conjuntos de la forma

$$\{x_n : n \geq N\} \text{ para cada } N \in \mathbb{N}$$

Términos de (x_n) a partir del N -ésimo.

La convergencia no depende de los primeros términos, sino de lo que ocurre "muy adelante"

De hecho, si (x_n) converge a $L \in \mathbb{R}$, por la proposición anterior, podemos escribir que

donde

$$L \in [u_N, v_N],$$

$\rightarrow u_N = \inf \{x_n : n \geq N\}$

Ínfimo de toda la sucesión a partir de N :

$$u_N \leq x_n \quad \forall n \geq N$$
$$\Downarrow$$
$$u_N \leq L$$

y $v_N = \sup \{x_n : n \geq N\}$

Supremo de toda la sucesión a partir de N :

$$x_n \leq v_N \quad \forall n \geq N$$
$$\Downarrow$$
$$L \leq v_N$$

Pero, en lugar de considerar u_N y v_N para un $N \in \mathbb{N}$ fijo, podemos considerarlos para cada $N \in \mathbb{N}$, de modo que tendremos dos sucesiones

(u_N) y (v_N)

Prop. La sucesión (u_N) es creciente y (v_N) es decreciente.

DEM: Vamos a probarlo para (u_N) .

$$u_N = \inf \{x_n : n \geq N\} = \inf \{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_N \leq x_N}_{\substack{\uparrow \\ u_N \text{ es cota inferior}}} \quad \forall n \geq N \rightarrow \begin{array}{l} \text{Como lo es para } n \geq N, \\ \text{lo es para } n \geq N+1 \end{array}$$

$$\Rightarrow u_N \leq \inf \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} = \inf \{x_n : n \geq N+1\} = u_{N+1}$$

$\Rightarrow (u_N)$ es creciente.

Para (v_N) es análogo. 

Además, como hemos supuesto (x_n) acotada (u_N) y (v_N) son acotadas y, al ser monótonas, convergen. Si, además, (x_n) converge a L , hemos visto que

$$u_N \leq L \leq v_N \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \liminf u_N \leq L \leq \limsup v_N$$

Estos números son útiles, aunque no sepamos si (x_n) converge, porque, si lo hace, tenemos su límite "controlado".

Def (Límite superior e inferior de una sucesión). Sea (x_n) una suc.

El límite superior y el límite inferior de (x_n) son, respectivamente:

$$\limsup x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sup \{x_n : n \geq N\}}_{v_N}$$

$$\liminf x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\inf \{x_n : n \geq N\}}_{u_N}$$

Si (x_n) es acotada, sabemos que ambos existen, pero:

- Si (x_n) no está acotada superiormente, definiremos

$$\limsup x_n = +\infty$$

- Si (x_n) no está acotada inferiormente, definiremos

$$\liminf x_n = -\infty.$$

Obs: En general, $\limsup x_n$ no es el supremo de la sucesión.
Por ejemplo, para $x_n = 1/n$, como es estrictamente decreciente,
$$\sup x_n = 1;$$

sin embargo,

$$v_N = \sup \{x_n : n \geq N\} = \sup \left\{ \frac{1}{n} : n \geq N \right\} = \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow \limsup v_N = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0.$$

Teorema 1 Sea (x_n) una sucesión. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ está definido, entonces

$$\liminf x_n = \lim x_n = \limsup x_n.$$

DEM: Llamamos

$$u_N = \inf \{x_n : n \geq N\} \quad v_N = \sup \{x_n : n \geq N\}$$

Sabemos que (u_N) es creciente y (v_N) decreciente. Sean, además,

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \liminf x_n; \quad v = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = \limsup x_n.$$

Como, para N suficientemente grande $u_N \leq x_n \leq v_N \quad \forall n \geq N$,
y $\lim x_n$ está definido,

$$u \leq \lim x_n \leq v.$$

- Si $\lim x_n = +\infty$, como x_n no está acotada superiormente,
$$v = \limsup x_n = +\infty.$$

Supongamos que $\liminf x_n = L \in \mathbb{R}$, entonces

$$u_N \leq L \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \leftarrow \text{Una sucesión creciente tiende a su supremo}$$

$$\Rightarrow \inf \{x_n : n \geq N\} \leq L \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Pero como $\lim x_n = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > L \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow u_{n_0} = \inf \{x_n : n \geq n_0\} \geq L \text{ i para cualquier } L! \text{ (}\# \text{)}$$

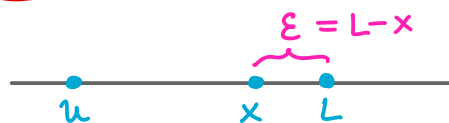
$$\Rightarrow \liminf x_n = +\infty \quad \checkmark$$

• Si $\lim x_n = -\infty$, es análogo. ✓

• Si $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$u = \liminf x_n \leq L \leq \limsup x_n = v.$$

Supongamos que $u < L$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ con $u < x < L$



Como x_n converge a L , para $\varepsilon = L - x$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < L - x \quad \forall n \geq n_1$$

$$\Leftrightarrow x - L < x_n - L < L - x \Leftrightarrow \boxed{x < x_n} < 2L - x \quad \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow u_N = \inf \{x_n : n \geq N\} \geq x \quad \forall N \geq n_1$$

$$\Rightarrow u \geq x \quad (\#)$$

$$\Rightarrow \liminf x_n \geq L$$

Por un argumento similar llegamos a que

$$\limsup x_n \leq L \leq \liminf x_n \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

Pero sabemos que $\limsup x_n > L > \liminf x_n$

$$\Rightarrow \liminf x_n = L = \limsup x_n. \quad \checkmark$$



Teorema 2. Dada una sucesión (x_n) con

$$\liminf x_n = \limsup x_n,$$

se da que:

(i) $\lim x_n$ existe

(ii) $\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$.

DEM:

• Si $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$,

$$u_N \leq x_n \Rightarrow \underbrace{\lim u_N}_{+\infty} \leq \lim x_n \Rightarrow \lim x_n = +\infty \quad \checkmark$$

• Si $\liminf x_n = \limsup x_n = -\infty$, es análogo.

• Si $\liminf x_n = \limsup x_n = L \in \mathbb{R}$, sabemos que, fijado $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N \leq x_n \leq v_N \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

$\Rightarrow x_n$ es una sucesión acotada. Además,

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = v.$$

Por el Teorema del Sándwich, (x_n) tiene límite y

$$u = \lim x_n = v$$

SUCESIONES DE CAUCHY

Teorema 1 Sea (x_n) una sucesión. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ está definido, entonces

$$\liminf x_n = \lim x_n = \limsup x_n.$$

Este teorema, nos dice que si (x_n) es una sucesión convergente, para un $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, los números

$$u_N = \inf \{x_n : n \geq N\} \text{ y } v_N = \sup \{x_n : n \geq N\}$$

están todo lo cerca que queramos. Esto implica que, de hecho, todos los valores del conjunto

$$\{x_n : n \geq N\}$$

están todo lo cerca que queramos.

Esto nos lleva al siguiente concepto, crucial en Análisis, y una herramienta teórica muy potente:

Def (Sucesión de Cauchy) Decimos que una sucesión (x_n) es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

↑ Cualquier pareja de términos de la sucesión están a una distancia menor que un $\varepsilon > 0$ prefijado.

Lema 1 Sea (x_n) una sucesión.

(x_n) convergente $\Rightarrow (x_n)$ es de Cauchy.

DEM. Supongamos que (x_n) tiende a L . Fijado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$$

Podemos escribir, en lugar de n , una m :

$$|x_m - L| < \varepsilon/2 \quad \forall m \geq N.$$

Así, fijado $\varepsilon/2 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ con

$$|x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n| \stackrel{DT}{\leq} |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

$\uparrow$
 $|L - x_n| = |x_n - L| \quad \forall m, n \geq N.$

Lema 2. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces está acotada.

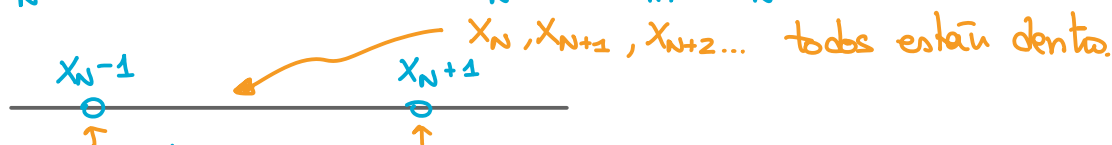
DEM.

Fijado $\varepsilon = 1$ en la def. de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_m - x_n| < 1 \quad \forall m, n \geq N$$

En particular,

$$|x_m - x_N| < 1 \quad \forall m \geq N \Rightarrow x_N - 1 < x_m < x_N + 1 \quad \forall m \geq N$$



Así, pues solo quedan $x_1, \dots, x_{N-1}$, por lo que hay un mínimo y un máximo (podría ser $x_N - 1$ o $x_N + 1$, si todos están por encima o por debajo)

$$\Rightarrow \min\{x_1, \dots, x_{N-1}, x_N - 1, x_N + 1\} \leq x_m \leq \max\{x_1, \dots, x_{N-1}, x_N - 1, x_N + 1\} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (x_n)$ es acotada.

$\uparrow$ Da igual poner $m, n, k, \dots$

Teorema Sea (x_n) una sucesión.

(x_n) es convergente en $\mathbb{R} \Leftrightarrow (x_n)$ es de Cauchy.

Def:

$\Rightarrow$ Ya lo hemos demostrado (Lema 1).

$\Leftarrow$ Supongamos que (x_n) es de Cauchy. Por el Lema 2, (x_n) es acotada, conque basta ver si existe el límite y esto podemos demostrarlo viendo que

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Por ser (x_n) de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ con

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N.$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < x_m - x_n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow x_n - \varepsilon < \underline{x_m} < x_n + \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

$\Rightarrow x_n + \varepsilon$ es cota superior de $x_m \quad \forall m \geq N$

$$\Rightarrow V_N = \sup \{x_m : m \geq N\} \leq x_n + \varepsilon$$

$\uparrow$ Es la menor cota superior de $\{x_m : m \geq N\}$

$$\Rightarrow V_N - \varepsilon \leq x_n \quad \forall n \geq N$$

$\Rightarrow V_N - \varepsilon$ es cota inferior de $x_n \quad \forall n \geq N$

$$\Rightarrow V_N - \varepsilon \leq \inf \{x_n : n \geq N\} = u_N$$

$\uparrow$ Es la mayor cota inferior de $\{x_n : n \geq N\}$

En conclusión,

$$\underline{V_N - \varepsilon} \leq \underline{u_N}$$

Tomando límites ahora,

$$\limsup x_n - \varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} V_N - \varepsilon \leq \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \liminf x_n$$

$$\Rightarrow \underline{\limsup x_n} \leq \underline{\liminf x_n} + \varepsilon$$

$\in \mathbb{R} \qquad \qquad \in \mathbb{R}$

Como esto es cierto $\forall \varepsilon > 0$,

$$\left. \begin{array}{l} \limsup x_n \leq \liminf x_n \\ \text{Además, por definición,} \\ \liminf x_n \leq \limsup x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \liminf x_n = \limsup x_n$$

$\Rightarrow$ Existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y es un n.º real. $\square$

El teorema anterior es muy importante porque nos muestra que podemos comprobar la convergencia de una sucesión, viendo que se da la condición de Cauchy, que no involucra al propio límite.

Ej Demostrar que la siguiente sucesión es de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Def (Sucesión de Cauchy) Decimos que una sucesión (x_n) es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

1. Positividad $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por definición, $x_1 \geq 0$ ✓

Ahora suponemos que $x_n \geq 0$ y vemos si lo es x_{n+1}

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \geq 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\sqrt{1+x_n}}_{\substack{\sqrt{1+0} \\ 1 \\ 0 \\ 0}} \geq 0$

2. Observación importante. Lo que queremos hacer es acotar

$|x_m - x_n|$ por un $\varepsilon > 0$, así que vamos a ver si podemos acotar: para $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}|}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}} = \frac{(1+a) - (1+b)}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}} = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}}$$

3. Acotación de $|x_{n+1} - x_n|$

Aplicando el paso anterior a $x_n, x_{n-1} \geq 0$:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+x_{n-1}}| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x_{n-1}}}$$

Def.

Pero como $x_n, x_{n-1} \geq 0$,

$$\sqrt{1+x_n} \geq \sqrt{1} = 1 \quad \text{y} \quad \sqrt{1+x_{n-1}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x_{n-1}} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x_{n-1}}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \quad \leftarrow \text{Aplicamos de nuevo aquí}$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^2} |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\leq \frac{1}{2^3} |x_{n-2} - x_{n-3}|$$

Aplicamos todos
las veces que
podamos

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$$

$$1 = n - (n-1)$$

Ya no podemos
"bajar" más

4. Condición de Cauchy

Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $m, n \in \mathbb{N}$, pongamos con

$m > n$. Buscamos $N \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N.$$

$n, n+1, n+2, \dots, m$

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$\uparrow \pm x_{n+1} \pm x_{n+2} \pm \dots \pm x_{m-1}$

D.T.

$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k|$$

Punto (3) anterior

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot |x_2 - x_1|$$

Constante

$$= |x_2 - x_1| \cdot \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Como tiene que valer para todo $m > n$, esto puede ser todo lo grande

$$\leq |x_2 - x_1| \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

que queramos

— Serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

En nuestra serie, llamamos $j = k-1 \Rightarrow j+1 = k$

$$\sum_{j=n-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot |x_2 - x_1|$$

Queremos esto

$$\Rightarrow |x_m - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-2}} \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x_2 - x_1|}{\varepsilon} < 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{|x_2 - x_1|}{\varepsilon} < n-2 \Rightarrow \boxed{2 + \log_2 \frac{|x_2 - x_1|}{\varepsilon} < n} \quad (*)$$

Para que se cumpla la condición de Cauchy, basta tomar $N \in \mathbb{N}$ que cumpla $(*)$

Esto demuestra que la sucesión es de Cauchy y, por tanto, convergente en $\mathbb{R}$.

La condición $|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ no es suficiente para que se cumpla la condición de Cauchy

Ej Consideramos la sucesión $x_n = \log n$, para $n \geq 1$

NEPERIANO

a) Demostrar que $|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

El logaritmo es creciente

$$|x_{n+1} - x_n| = |\log(n+1) - \log n| = \log(n+1) - \log n$$

$$= \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \checkmark$$

1

b) Demostrar que la sucesión no es de Cauchy

Sabemos que

(x_n) es de Cauchy $\Leftrightarrow (x_n)$ converge en $\mathbb{R}$

Pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty \quad \times$$

La condición $|x_m - x_n| < \varepsilon$ para $m = n+p$ no es suficiente para que se dé la condición de Cauchy

Basta considerar de nuevo el ejemplo anterior:

$$|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| = \log(n+p) - \log n$$

$$= \log \left(\frac{n+p}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En part, esto nos asegura que para $\varepsilon > 0$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

1

Sin embargo, x_n no es de Cauchy...

¿Qué es lo fundamental entonces?

Que en la condición de Cauchy nos dice que fijado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

Este "para todo" nos dice que no solo tenemos que tener en cuenta que $m = n+1$ o que $m = n+p$, es decir, que "el salto" de n a m sea finito, sino que, como la sucesión tiene infinitos términos, m y n pueden estar muy, muy, muy lejos: tan lejos como ∞ .

Ej: Consideramos la sucesión definida por

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \leftarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Demostren que no es de Cauchy

Tenemos que ver que para cierto ε , pongamos $\varepsilon = 1$, para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tales que

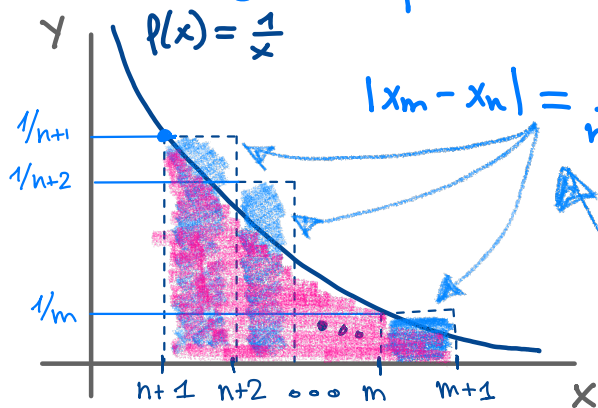
$$|x_m - x_n| > 1.$$

(No se cumple la condición de Cauchy)

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \right) \\ &\quad - \left(\cancel{1} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \quad \leftarrow \quad \text{Es positivo segun} \end{aligned}$$

$$|x_m - x_n| = x_m - x_n$$

Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x}$



$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m}$$

La suma de las áreas de los rectángulos será mayor o igual que el área , que es una integral definida

$$\Rightarrow |x_m - x_n| \geq \int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_{n+1}^{m+1}$$

BARROW

$$= \log(m+1) - \log(n+1)$$

$$m = n + p$$

$$p \in \mathbb{N}, p \geq 1$$

$$= \log \frac{n+p+1}{n+1} = \log \left(1 + \frac{p}{n+1} \right)$$

$$\rightarrow |x_m - x_n| \geq \log \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) > 1$$

$$1 + \frac{p}{n+1} > e \rightarrow \frac{p}{n+1} > e-1 \rightarrow p > (n+1)(e-1) \quad (*)$$

Por tanto, para todo $N \in \mathbb{N}$, elegimos un $n \geq N$ fijo y tomando $m \geq n+p$, con $p \in \mathbb{N}$ que cumpla $(*)$, aseguramos que

$$|x_m - x_n| > 1$$

Esto demuestra que la sucesión

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

no es de Cauchy, lo cual también nos dice que no converge en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ se le llama serie armónica y acabamos de probar que

LA SERIE ARMÓNICA ES DIVERGENTE