

Números reales

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$. Demostrar la **desigualdad entre la media geométrica y la aritmética**:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

2. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que, para $m, n \in \mathbb{R}, m, n > 0$,

$$m > n \Rightarrow m^p > n^p.$$

3. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

4. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

o, de forma más compacta,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

A esta expresión se le llama **desigualdad triangular generalizada**.

5. Definimos, para $x, y \in \mathbb{R}$

$$\tilde{d}(x, y) = \min\{1, |x - y|\}.$$

Demostrar que $\tilde{d}$ define una distancia en $\mathbb{R}$. A esta distancia se la conoce como **distancia truncada**.

6. Demostrar que dados $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$,

$$L_1 = L_2 \iff |L_1 - L_2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

7. Calcular el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, si existen:

$$a) X_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 \leq 4\}$$

$$c) X_3 = \left\{ \frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$b) X_2 = \left\{ \frac{n-1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$d) X_4 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \leq 3\}$$

8. Dado el conjunto $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$, definimos

$$-X = \{-x \in \mathbb{R} : x \in X\}.$$

Si X tiene supremo, ¿qué podemos asegurar de $-X$?

9. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y tales que se cumple

$$x < y, \text{ para todo } x \in X, y \in Y.$$

a) Demostrar que existen $\sup X$ e $\inf Y$.

b) Demostrar que $\sup X \leq \inf Y$.

c) Hallar dos conjuntos que, bajo las hipótesis anteriores, además cumplan que $\sup X = \inf Y$.