

NÚMEROS REALES

EL ORDEN EN $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{R}$ tiene definida una relación de orden ($\leq$) de modo que, dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. Reflexiva $x \leq x$
2. Antisimétrica $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. Transitiva. $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
4. Totalidad Siempre $x \leq y$ o $y \leq x$

Además, esta relación de orden es compatible con la suma y el producto:

- Si $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- Si $x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

A partir de la relación $\leq$, podemos definir en $\mathbb{R}$ la "relación de orden estricto", $<$:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y$ y $x \neq y$

Propiedades del orden en $\mathbb{R}$

(P1) $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$

DEM

$$x \leq y \rightarrow x - y - x \leq y - y - x \rightarrow -y \leq -x \quad \checkmark$$



(P2) $x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y, z < 0 \Rightarrow zx \geq zy$

DEM

$$\left. \begin{array}{l} z < 0 \Rightarrow -z > 0 \\ x \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow -zx \leq -zy \stackrel{(P1)}{\Rightarrow} zx \geq zy \checkmark$$

$$(P3) \quad x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$$

DEM:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y + x \geq 0 \\ (y + x)(y - x) \geq 0 \end{array} \Rightarrow y^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq x^2 \checkmark$$

$$(P4) \quad \left. \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x \leq y \\ z, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq z \leq t \end{array} \right\} \Rightarrow xz \leq yt.$$

DEM

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \xrightarrow{z \geq 0} xz \leq yz \\ z \leq t \xrightarrow{y \geq 0} yz \leq yt \end{array} \right\} \Rightarrow xz \leq yt \checkmark$$

$$(P5) \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

DEM:

$$x, y > 0 \Rightarrow xy > 0 \quad y \cdot \frac{1}{xy} > 0$$

$$x < y \Rightarrow x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \checkmark$$

(P6) Desigualdad de Bernoulli.

Si $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

DEM: Inducción en n .

• Caso base ($n=1$)

$$1+x = (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x = 1+x \quad \checkmark$$

• Caso general

- HIP $(1+x)^n \geq 1+nx$

Multiplicando por $(1+x)$, que es positivo

porque $x \geq -1 \rightarrow x+1 \geq 0$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \stackrel{\text{HIP}}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x)$$

$$= 1 + \underbrace{nx + x} + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\begin{array}{l} nx^2 \geq 0 \\ \text{porque } n \geq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \geq 1 + (n+1)x$$

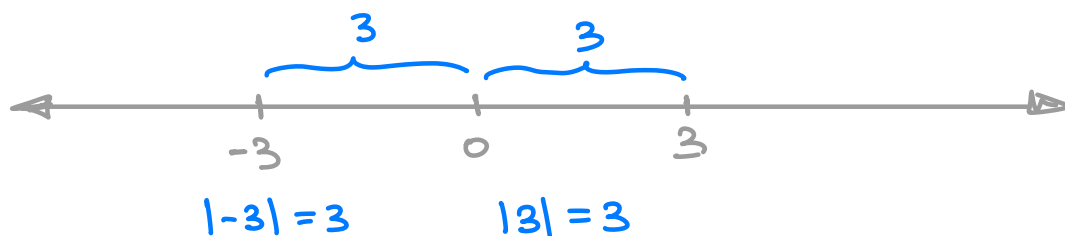
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \quad \checkmark$$



VALOR ABSOLUTO EN $\mathbb{R}$

El paso siguiente a establecer un orden en $\mathbb{R}$ es introducir una noción que nos permita medir distancias y expresar desigualdades de forma simétrica, sin importar el signo. En la recta real, cada $x \in \mathbb{R}$ se asocia a un punto situado a cierta distancia

del 0. Esta distancia es no negativa:



El valor absoluto de un n° real representa su distancia al origen. En general, se define así:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

(ABS 1) $|x| \geq 0$.

(ABS 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ABS 3) $|x| = |-x|$

(ABS 4) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(ABS 5) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

(ABS 6) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$,

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

DEM:

(ABS 1)

- Si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$ ✓
- Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$ ✓

(ABS 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftarrow$ $x = 0$, $|x| = |0| = 0$ ✓

$\Rightarrow$ $|x| = 0$

- Si $x \geq 0$, $|x| = x \rightarrow 0 = x$ ✓ ← Solo se da este caso
- Si $x < 0$, $|x| = -x \rightarrow 0 = -x$ Imposible

(ABS 3) $|x| = |-x|$

- Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = \underline{x}$
 $\hookrightarrow -x \leq 0 \rightarrow |-x| = -(-x) = \underline{x} \quad \Bigg\} \Rightarrow |x| = |-x| \checkmark$
- Si $x < 0 \rightarrow |x| = \underline{-x}$
 $\hookrightarrow -x > 0 \rightarrow |-x| = \underline{-x} \quad \Bigg\} \Rightarrow |x| = |-x| \checkmark$

(ABS 4) $|xy| = |x| \cdot |y|$

- $x \geq 0, y \geq 0 \rightarrow xy \geq 0 \rightarrow |xy| = xy \checkmark$
 $\hookrightarrow |x| = x, |y| = y \rightarrow |x| \cdot |y| = xy$
- $x \geq 0, y < 0 \rightarrow xy \leq 0 \rightarrow |xy| = -xy \checkmark$
 $\hookrightarrow |x| = x, |y| = -y \rightarrow |x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -xy$

Los otros dos casos son análogos.

(ABS 5) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{con } y \neq 0$

Vamos a probar primero que $\left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|y|}$

- $y > 0 \rightarrow \frac{1}{y} > 0 \rightarrow \left| \frac{1}{y} \right| = \underline{\frac{1}{y}} \checkmark$
 $\hookrightarrow |y| = y \rightarrow \frac{1}{|y|} = \underline{\frac{1}{y}}$
- $y < 0 \rightarrow \frac{1}{y} < 0 \rightarrow \left| \frac{1}{y} \right| = \underline{-\frac{1}{y}} \checkmark$
 $\hookrightarrow |y| = -y \rightarrow \frac{1}{|y|} = \underline{\frac{1}{-y}}$

Escribiendo $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$,

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} \checkmark$$

$\uparrow$ ABS 4

$$(ABS\ 6) \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0, \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$\Rightarrow$ Sup. que $|x| \leq a$.

- $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \leq a \rightsquigarrow -a \leq x \leq a \checkmark$
menor o igual que 0
- $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow -x \leq a \rightarrow x \geq -a$
 $\rightarrow -a \leq x \leq a \checkmark$
 $x < 0$ y $a \geq 0$

$\Leftarrow$ Sup. que $-a \leq x \leq a$

- $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \leq a \rightsquigarrow |x| \leq a \checkmark$
- $x < 0 \rightarrow a \geq -x = |x| \rightsquigarrow |x| \leq a \checkmark$
 $-a \leq x$

⚠ Esta última propiedad nos permite (1) hacer acotaciones y (2), más adelante, definir límites.

Corolario 1 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -|x| \leq x \leq |x|$

DEM

Basta tomar $a = |x| \geq 0$ en (ABS 6)

$$a \geq 0 \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x| \checkmark$$

Corolario 2 Dados $x, L \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$,

$$|x - L| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

DEM: Por (ABS 6),

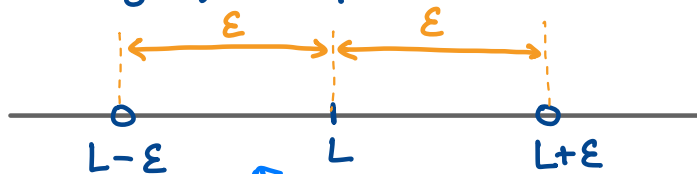
$$|x - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - L < \varepsilon$$

$$\stackrel{+L}{\Leftrightarrow} L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$



La interpretación de este corolario es que $|x-L| < \varepsilon$ significa que



x está aquí dentro
la distancia de x a L es menor que ε .

LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Teorema (Desigualdad triangular, DT) Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

DEM: Por el Corolario 1 de (ABS 6),

$$\left. \begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array} \right\} \rightarrow -(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y|$$

(ABS 6) $\rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|. \checkmark$
 Tomando $a = |x| + |y| \geq 0$



Corolario (DT 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x-y| \leq |x| + |y| \quad |y| = |-y|$$

DEM:

$$|x-y| = |x + (-y)| \stackrel{DT}{\leq} |x| + |-y| \stackrel{|y|=|-y|}{=} |x| + |y| \quad \checkmark$$



Corolario (DT 2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| \leq |x-y| (|x| + |y|).$$

DEM:

$$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y| \cdot |x+y| \stackrel{DT}{\leq} |x-y| (|x| + |y|)$$

□

↑
Se usa en el estudio de límites y continuidad de funciones polinómicas.

Corolario (DT 3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

DEM: Por una parte,

$$|x| = |y + (x-y)| \stackrel{DT}{\leq} |y| + |x-y|$$

$$\Rightarrow |x| - |y| \stackrel{(I)}{\leq} |x-y|$$

Por otra, si cambiamos x por y aquí,

$$|y| - |x| \leq |y-x| \rightarrow |y| - |x| \leq |x-y|$$

$$|x-y| = |y-x|$$

porque $|z| = |-z|$

$$\rightarrow |x| - |y| \stackrel{(II)}{\geq} -|x-y|$$

Juntando (I) y (II),

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

Por (ABS 6) con $a = |x-y|$,

$$||x| - |y|| \leq |x-y| \quad \checkmark$$

□

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Ej Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

$$|x-y| = |(x-z) + (z-y)| \stackrel{DT}{\leq} |x-z| + |z-y| = |x-z| + |y-z|$$

DISTANCIA EN $\mathbb{R}$

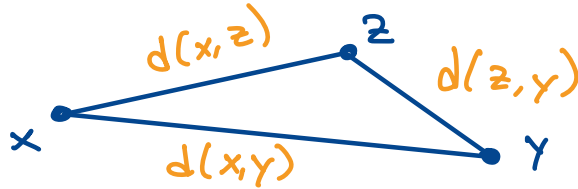
La noción de distancia se usa en Matemáticas para poder medir. Se puede establecer qué es una distancia en cualquier conjunto X :

Def (Distancia o métrica) Sea X un conjunto. Una distancia o métrica en X es una función

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

- (i) No negativa $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
- (ii) "Separación" $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) Simetría $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) Desigualdad triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$



Al par (X, d) se le llama espacio métrico.

Def En $\mathbb{R}$ definimos la distancia usual o euclídea como

$$d(x, y) = |x - y|$$

Así definido, $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico:

- (i) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ ✓
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ ✓
- (iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ ✓
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ porque:

$$|x-y| = |x-2+2-y| \stackrel{\Delta T}{\leq} |x-2| + |2-y| \quad \checkmark$$

Otras distancias en $\mathbb{R}$

— Distancia discreta —

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d_{\text{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$ es un espacio métrico en el que todos los puntos están a la misma distancia

Comprobemos que d_{disc} define una distancia:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ por def. $\checkmark$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ por def. $\checkmark$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ porque si $x = y$, ambos son 0; y si $x \neq y$, ambos son 1.
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
 - Si $x = y = z$, todos son 0 $\checkmark$
 - Si $x \neq y = z$ $1 \leq 1 + 0$ $\checkmark$
 - Si $x = y \neq z$ $0 \leq 1 + 1$ $\checkmark$
 - Si $x \neq y \neq z$, $x \neq z$ $1 \leq 1 + 1$ $\checkmark$

Esta métrica se usa como "ejemplo extremo" o para construir contraejemplos.

— Distancia acotada —

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d'(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

$(\mathbb{R}, d')$ es un espacio métrico en el que se cumple:

$$0 \leq d'(x, y) < 1$$

↑ Esto es porque el denom.
es estrictamente mayor que
el numerador.

Lema. Consideramos la función

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

Se tiene que:

1- f es creciente en su dominio

2- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, \quad f(a+b) \leq f(a) + f(b).$

DEM.

1- Derivamos

$$f'(t) = \frac{1+t - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

Como $f'(t) > 0$ para $t \geq 0$, f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

$$2- \boxed{f(a) + f(b)} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a(1+b) + b(1+a)}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \frac{a + b + 2ab}{1 + a + b + ab}$$

$$= \frac{\overbrace{(a+b+ab)}^t}{1 + \underbrace{(a+b+ab)}_t} + \boxed{\frac{ab}{1+a+b+ab}}$$

por ser
 $a, b \geq 0$.

$$a+b+\overset{\geq 0}{ab} \geq a+b \geq f(a+b+ab)$$

f creciente

$$\geq f(a+b).$$

$$\Rightarrow f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$



Vamos a demostrar que la distancia acotada

$$d'(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

define una métrica en $\mathbb{R}$.

(i) $d'(x,y) \geq 0$ porque num y denom son ≥ 0 .

(ii) $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x=y$.

$$(iii) d'(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d'(y,x)$$

(iv) Desig. triangular $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$

$$d'(x,z) + d'(z,y) = \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \quad \rightarrow \quad = f(|x-z|) + f(|z-y|)$$

$$f(a) + f(b) \geq f(a+b) \quad \rightarrow \quad \geq f(|x-z| + |z-y|)$$

Por la Desig. Triang.

del valor abs,

$$\underline{|x-z| + |z-y|} \geq \underline{|x-y|}$$

Este n° es $\geq$ que este

y f es creciente!

$$\geq f(|x-y|)$$

$$= \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \checkmark = d'(x,y).$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS. COTAS.

Def (Máximos y mínimos) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

• $M \in X$ es máximo, $\max X$, si $x \leq M \quad \forall x \in X$.

• $m \in X$ es mínimo, $\min X$, si $m \leq x \quad \forall x \in X$

Max $\rightarrow$ Elemento "por encima" de todos

Min $\rightarrow$ — " — "por debajo" — " —

Prop Si $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, y tiene máximo o mínimo, es único

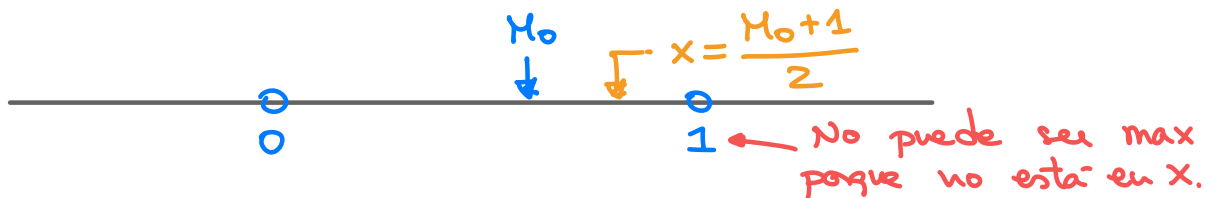
DEM: Sup que $M_1, M_2 \in X$ son dos máximos.

• $x \leq M_1 \quad \forall x \in X$, en part. si $x = M_2 \rightarrow M_2 \leq M_1$
• $x \leq M_2 \quad \forall x \in X$, en part, si $x = M_1 \rightarrow M_1 \leq M_2$ $\Rightarrow M_1 = M_2$ ✓

Para el mínimo se hace igual.



Ej Sea $X = (0, 1)$. Probar que no tiene máximo.



Supongamos que $M_0 \in (0, 1)$ es el máximo. Esto nos diría que $\forall x \in (0, 1)$, $x \leq M_0$. Sin embargo, si tomamos

$$x = \frac{M_0 + 1}{2} \leftarrow \text{Punto medio de } M_0 \text{ y } 1$$

se tiene que $M_0 < x < 1$ (*), es decir $x \in (0, 1)$ y es mayor que M_0 , conque M_0 no puede ser el máximo. Tenemos que probar (*)

$$\text{Si fuera } M_0 \geq \frac{M_0 + 1}{2} \Rightarrow 2M_0 \geq M_0 + 1 \Rightarrow M_0 \geq 1$$

y no puede ser porque al ser $M_0 = \max(0, 1)$ tendríamos que pertenecer al conjunto $\Rightarrow M_0 < x$

Del mismo modo, si $\frac{M_0+1}{2} \geq 1 \Rightarrow M_0+1 \geq 2 \Rightarrow M_0 \geq 1$
que tampoco puede ser $\Rightarrow x < 1$.

Conclusión: Siempre podemos hallar $x \in (0,1)$ mayor
que cualquier M_0 que fijemos en $(0,1) \Rightarrow X=(0,1)$
no tiene máximo

Ej Hallar, para $Y=[0,1]$, $\max Y$, si existe.

Claramente $\max Y = 1$ porque:

- $1 \in Y$
 - $1 \geq y \quad \forall y \in Y$
 - Si $M_0 > 1$, $M_0 \notin Y$, por lo que no puede ser el max.
-

Def (Cotas de un subconjunto) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

1.- Decimos que $S \in \mathbb{R}$ es cota superior de X si

$$x \leq S \quad \forall x \in X.$$

2.- Decimos que $s \in \mathbb{R}$ es cota inferior de X si

$$s \leq x \quad \forall x \in X$$

3.- Si el conj. X no tiene cotas, se dice que es no acotado.

🚫 Las cotas de $X \subseteq \mathbb{R}$ las vemos en $\mathbb{R}$, no tienen
porque estar en X .

Ej En $\mathbb{R}$,

- Para $X = (0,1)$

Cotas superiores: $1, 3, \pi, 10^{23}$
Cotas inferiores: $0, -1, -e, -10^8$ } Ninguna está en $(0, 1)$.

• $Y = [0, 1]$

Cotas superiores: $1, 3, \pi, 10^{23}$
↑ Está en $[0, 1]$
↑ No están en $[0, 1]$

• $Z = \mathbb{N}$

Cotas superiores: No tiene. No están en $\mathbb{N}$
Cotas inferiores: $0, -1, -\frac{2}{3}, \dots$
↑ Está en $\mathbb{N}$

Def (Supremo e ínfimo) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

1: Si X está acotado superiormente, llamamos supremo de X , $\sup X$, al mínimo del conjunto de todas las cotas superiores, si existe.

2: Si X está acotado inferiormente, llamamos ínfimo de X , $\inf X$, al máximo del conjunto de todas las cotas inferiores, si existe.

Ej Hallar el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos:

a) $X = (0, 1)$.

Supremo Vamos a ver que $\sup X = 1$.

Claramente es cota superior. ✓ Hay que ver que es la menor. Supongamos que existe otra cota superior

$x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < 1$.

- Si $x_0 < 0$, no sería cota superior $\times$
- Necesariamente $x_0 \in (0, 1)$. Pero en este caso, tampoco sería cota superior porque el elemento

$$x = \frac{x_0 + 1}{2} \leftarrow \text{Punto medio entre } x_0 \text{ y } 1$$

cumple que $\underline{x_0 < x < 1}$ y $x \in (0, 1)$
 $\uparrow$ x_0 no es cota superior

$$\Rightarrow \boxed{\sup X = 1}$$

Ínfimo Análogamente, se prueba que $\boxed{\inf X = 0}$

b) $Y = [0, 1]$

Se demuestra como en a) que $\sup Y = 1$; $\inf Y = 0$.

De hecho, en este caso,

$$\sup Y = \max Y \in Y; \quad \inf Y = \min Y \in Y.$$

Probaremos que si un conj. tiene máximo, éste coincide con el supremo; y si tiene mínimo, con el ínfimo.

SUPREMO E ÍNFIMO: PROPIEDADES

Prop Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$

- 1) Si existe, $\sup X$ es único.
- 2) Si X tiene máximo, entonces también tiene supremo y, de hecho, $\sup X = \max X$
- 3) $\sup X \in X \iff \sup X = \max X$.

DEM:

1) Basta usar que, por def, $\sup X$ es el mínimo del conj. de todas las cotas superiores de X y, como existe, el mínimo es único.

2) Sea $M = \max X$. Veamos que $\sup X = M$.

- M es cota superior de X porque, por ser máximo, $x \leq M \quad \forall x \in X$.

- Supongamos que $M_0 \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de X , pero menor que M , $M_0 < M$. Por ser cota superior, $x \leq M_0 \quad \forall x \in X$, en particular, $M \leq M_0$.
 $M = M_0$

Concluimos que M es la menor cota superior de X
 $\Rightarrow M = \sup X$.

3) $\sup X \in X \iff \sup X = \max X$.

$\Leftarrow$ $\sup X = \max X \in X$, por def de max.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\sup X \in X$. Entonces, $\sup X$ es un elemento de X que cumple que $x \leq \sup X \quad \forall x \in X$, que es la definición de máximo $\Rightarrow \sup X = \max X$.



Prop Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

- 1) Si existe, $\inf X$ es único.
- 2) Si X tiene mínimo, entonces también tiene ínfimo y, de hecho, $\inf X = \min X$.
- 3) $\inf X \in X \Leftrightarrow \inf X = \min X$.

DEM: Análoga a la anterior. 

AXIOMA DE COMPLETITUD O DEL SUPREMO

Axioma (de completitud o del supremo en $\mathbb{R}$). Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

Si X está acotado superiormente, entonces tiene supremo.

⚠ Es un axioma de construcción de $\mathbb{R}$, no una proposición deducible de otros axiomas.

Prop (del ínfimo en $\mathbb{R}$) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Si X está acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo.

DEM

Definimos el conjunto

$$X' = \{-x : x \in X\}$$

✓ x' son los elem's de X , pero cambiados de signo.

Como $X \neq \emptyset \rightarrow X' \neq \emptyset$.

X acotado inferiormente $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 \leq x \quad \forall x \in X$.

$$\stackrel{\bullet (-1)}{\Rightarrow} (-x_0) \geq \underbrace{(-x)}_{x'} \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow (-x_0) \geq x' \quad \forall x' \in X'$$

$\Rightarrow X'$ es un subconj. de $\mathbb{R}$ acotado superiormente

Ax. Compl.

$\Rightarrow X'$ tiene un supremo, a saber $s' = \sup X'$

Veamos que $(-s')$ es ínfimo de X :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad s' = \sup x' &\Rightarrow s' \geq x' \quad \forall x' \in X' \\
 &\Rightarrow s' \geq (-x) \quad \forall x \in X \\
 &\stackrel{\bullet (-1)}{\Rightarrow} (-s') \leq x \quad \forall x \in X
 \end{aligned}$$

Falta ver que es la mayor cota inf.

$\Rightarrow -s'$ es cota inferior de X .

- Supongamos que hay una cota inferior mayor que $-s'$, a saber, s_0 :

$$\begin{aligned}
 -s' \leq \underbrace{s_0}_{\substack{\uparrow \text{ Por ser } s_0 \\ \text{cota inf. de } X}} \leq x \quad \forall x \in X &\stackrel{\bullet (-1)}{\Rightarrow} s' \geq -s_0 \geq -x \quad \forall x \in X \\
 &\Rightarrow \underbrace{s' \geq -s_0}_{\substack{\uparrow \\ -s_0 \text{ es una cota superior} \\ \text{de } x' \text{ menor que } s'}} \geq x' \quad \forall x' \in X'
 \end{aligned}$$

¡CONTRADICCIÓN!

¡ s' es el supremo de X' !

$\Rightarrow -s'$ es la mayor cota inferior de X'

$\Rightarrow x'$ tiene ínfimo ✓ 

Prop $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente.

DEM:

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$
Ax. Compl.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ tiene un supremo, a saber $s_0 \in \mathbb{R}$.

Pero como s_0 es supremo, $s_0 - 1$ no puede serlo, lo que nos dice que existe $n \in \mathbb{N}$ con

$$s_0 - 1 < \underbrace{n}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}} \Rightarrow \underbrace{s_0}_{\substack{\uparrow \\ \sup \mathbb{N}}} < \underbrace{n+1}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}$$

¡Contradicción! 

PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DE $\mathbb{R}$

Lema. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

DEM. Supongamos que no: $n < x \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Pero esto nos diría que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ y

no es así (¡contad!)



Teorema (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$nx > y.$$

DEM: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$

$$nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$$

Pero como $y/x \in \mathbb{R}$, el Lema anterior nos asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > y/x \Rightarrow nx > y$ ✓

Corolario Para $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $x > \frac{1}{n}$.

DEM:

Por la Prop. Arquim., si $x > 0$ con $x, y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Tomando $y = 1$,

$$nx > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{n}. \checkmark$$



↑ Todo n° real positivo es mayor que $\frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$
(por muy pequeño que sea el n° real!!)

DENSIDAD DE $\mathbb{Q}$ EN $\mathbb{R}$

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$,
existe $q \in \mathbb{Q}$ con
$$x < q < y.$$

↑ Entre dos n° reales hay siempre un n° racional.

¡Por muy cerca que estén x e y !

DEM.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > x$.

$$y > x \Rightarrow \underbrace{y - x}_{\in \mathbb{R}} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } y - x > \frac{1}{n}$$

Corolario
de la Prop
Arquimediana

$$\Rightarrow n(y-x) > 1 \Rightarrow ny - nx > 1$$

Entre ny y nx hay más de una unidad de 'distancia'

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ con } nx < p < ny$$

$$\Rightarrow x < \underbrace{\frac{p}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y \quad \checkmark$$



COTAS. SUPREMOS E ÍNFIMOS: EJEMPLOS

Ej Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $(\mathbb{R}, \leq)$.

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Obs: $n \geq 1 \xRightarrow{:n} 1 \geq \frac{1}{n}$ y, de hecho, se da la igualdad para $n=1$. Esto nos dice que

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$\rightarrow$ A está acotado superior e inferiormente

$\Rightarrow$ A tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$.

Supremo 1 es una cota superior y además está en A (para $n=1$)

$$\Rightarrow \max A = 1 \Rightarrow \sup A = 1.$$

Ínfimo Veamos que $\inf A = 0$.

- 0 es cota inferior porque $0 < \frac{1}{n}$
- Sup. que hay otra cota inferior $x_0 \in \mathbb{R}$ mayor que 0 $\times$
 $\Rightarrow 0 < x_0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero como $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, el Corolario de la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ nos asegura que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$x_0 > \frac{1}{n_0} > 0. \quad \text{¡Contradicción!}$$

$$\Rightarrow \inf A = 0.$$

b) $B = \{q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2}\}$

Podemos escribir $B = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

Ínfimo Como B no está acotado inferiormente, no puede haber ni ínfimo, ni mínimo.

Supremo Veamos que $\sup B = \sqrt{2}$.

- Claramente, por definición de B , $\sqrt{2}$ es cota superior.
- Supongamos que hay otra cota superior, $x_0 \in \mathbb{R}$, menor que $\sqrt{2}$, esto es

$$\underbrace{q < x_0 < \sqrt{2}}_{\text{Para todo } q \in B} \quad (*)$$

Pero por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ aplicada en $(*)$, sabemos

que existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ con $x_0 < \underbrace{q_0 < \sqrt{2}}_{q_0 \in B}$

$\Rightarrow x_0$ no es cota superior de B ¡Contradictorio!

$$\Rightarrow \sup B = \sqrt{2}.$$

Además, B no tiene máximo porque si lo tuviera debería coincidir con el supremo y $\sqrt{2} \notin B$ por no ser racional.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \leq 0\}$

Resolviendo la ecuación

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$\rightarrow C = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

Supremo $\sup C = 1 = \max C$

Ínfimo No existe por no estar C acotado inferiormente en $\mathbb{R}$.

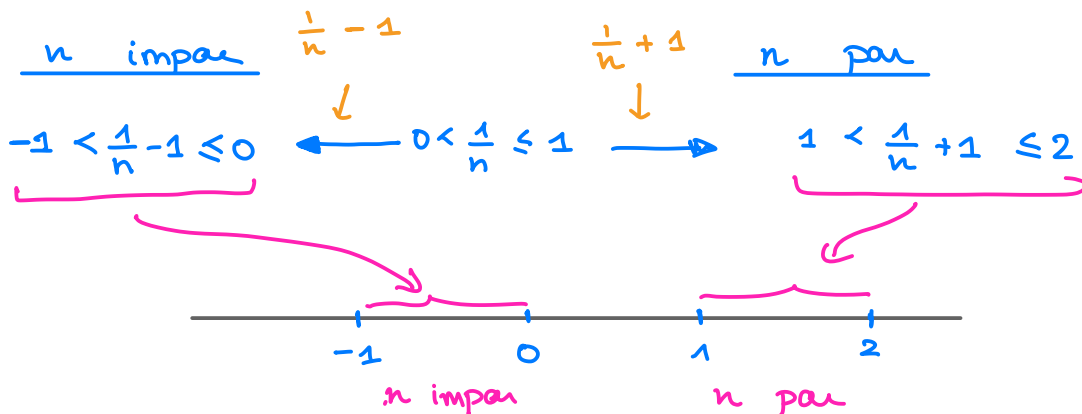
d) $D = \left\{ \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{⊗}} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}_{\text{"Cómo funciona" esto}} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

n	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$
1	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
3	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = -1$
4	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \dots$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} -1, & n \text{ impar.} \\ 1, & n \text{ par.} \end{cases}$$

⊗ Además, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ y $\frac{1}{n}$ es decreciente y tiende a 0

Distinguimos dos tipos de elementos:



En cualquier caso, D está acotado inferiormente por -1 y superiormente por 2 .

$\Rightarrow D$ tiene supremo e ínfimo.

Supremo Lo buscamos "cerca" de los términos pares:

términos con n par



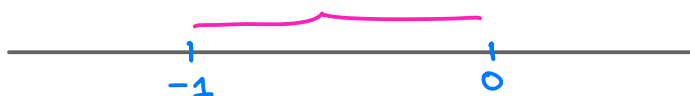
El primer término es para $n=2 \rightarrow \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Como $\frac{1}{n}$ es decreciente, $\frac{1}{n} + 1$ también lo es, por lo que $\frac{3}{2}$ es el mayor n^o real de D .

$$\Rightarrow \max D = \frac{3}{2} = \sup D.$$

Ínfimo Lo buscamos "cerca" de los términos impares.

términos con n impar



Veamos que $\inf D = -1$:

- -1 es cota inferior porque $-1 < \frac{1}{n} - 1 \leq 0$, según hemos visto para n impar antes.
- Supongamos que hay otra cota inferior $x_0 \in \mathbb{R}$ mayor que -1 :

$$-1 < x_0 \leq \frac{1}{n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto es equivalente, sumando 1 a que

$$0 < x_0 + 1 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corolario de la Prop. Arquimediada

$$\text{Existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ con } \frac{1}{n_0} < x_0 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_0} - 1 < x_0 \quad \text{¡Contrad!}$$

Hay al menos un n^o natural para el

que se cumple esto

$\Rightarrow x_0$ no es cota inferior

$$\Rightarrow \inf D = -1.$$

Además, D no tiene mínimo, porque si lo tuviere, debería ser -1 , por lo que para algún n impar,

$$\frac{1}{n} - 1 = -1 \rightarrow \frac{1}{n} = 0 \quad \underline{\underline{\text{impossible.}}}$$
