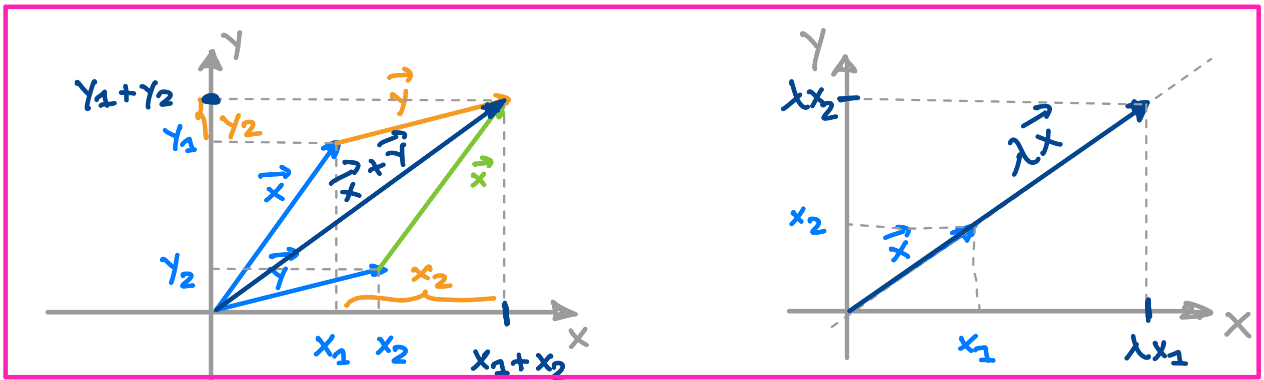
ESPACIOS VECTORIALES

MOTIVACIÓN

Cuando trabajamos con vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, utilizamos dos operaciones: FORMA GEOMÉTRICA



$\vec{x} = (x_1, y_1)$ $\quad$ $\vec{y} = (x_2, y_2)$ $\quad$ $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para sumar:

$$\vec{x}+\vec{y} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

Para multiplicar por λ:

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

FORMA ALGEBRAICA

La idea de lo que es un espacio vectorial es un conjunto (como $\mathbb{R}^2$) en el que hay definidas dos operaciones: suma de elem's del conjunto y producto de elementos del conjunto por un escalar.

Es importante dónde "vive" el escalar.

Además, estas operaciones cumplen ciertas propiedades. Cualquier conjunto que satisfaga esto es un espacio vectorial. Veremos que los "vectores" no son solo "flechas", sino que son todo lo que cumpla esas condiciones.

CUERPOS

Un cuerpo (en inglés, field) es una estructura algebraica, definida así:

Def (Cuerpo) Sea K un conjunto no vacío en el que hay definidas dos operaciones: suma $(+)$ y producto $(\cdot)$. Decimos que $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo si se cumplen:

(S1) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in K$ (Asociativa)

(S2) Existe $0 \in K$ con $x+0 = x = 0+x \quad \forall x \in K$ (Elem. neutro)

(S3) Dado $x \in K$, existe $y \in K$ con

$$x+y = 0 = y+x \quad \text{(Elem. opuesto)} \quad \text{"}y=-x\text{"}$$

(S4) $x+y = y+x \quad \forall x,y \in K$ (Conmutativa)

(P1) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \quad \forall x,y,z \in K$ (Asociativa)

(P2) Existe $1 \in K$ con $x\cdot 1 = x = 1\cdot x \quad \forall x \in K$ (Elem neutro)

(P3) Dado $x \in K$, existe $y \in K$ con ! Excepto para el $\underline{0}$.

$$x\cdot y = 1 = y\cdot x \quad \text{(Elem. inverso)} \quad \text{"}y = x^{-1}\text{"}$$

(P4) $x\cdot y = y\cdot x \quad \forall x,y \in K$ (Conmutativa)

(D) $\forall x,y,z \in K$ se dan las distributivas

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \qquad (y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x.$$

Ej ¿Son cuerpos...?

a) $\mathbb{N}-\{0\}$.

Claramente $\mathbb{N}-\{0\}$ no tiene elem. neutro para la suma, que es el 0.

b) $\mathbb{Z}$

La suma cumple todas las propiedades ✓

El producto es asociativo, hay un neutro $(1 \cdot n = n)$, es conmutativo pero... ¿todos los enteros tienen inverso multiplicativo? Por ejemplo, si tomamos $x = 2 \in \mathbb{Z}$, buscamos $y \in \mathbb{Z}$ con $x \cdot y = 1$, pero:

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \text{ no tiene inverso}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ <u>no</u> es un cuerpo.

c) $\mathbb{Q}$

En $\mathbb{Q}$ se "arregla" este problema porque dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1, \text{ siempre que } p \neq 0.$$

Las demás condiciones sí se dan $\Rightarrow \mathbb{Q}$ es un cuerpo.

d) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

En ambos se dan todas las condiciones, así que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos.

<u>Obs</u>: Los cuerpos son estructuras muy usadas en Matemáticas porque tienen muy buena estructura de forma natural. De hecho, son la base del Álgebra Lineal.

ESPACIOS VECTORIALES

Def (K-espacio vectorial, K-e.v.) Un espacio vectorial, V, sobre un cuerpo K (K-e.v) es un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores, en el que hay dos operaciones:

- Suma de vectores $\quad v+w \quad \forall v,w \in V$
- Producto por escalares $\quad \lambda v \quad \forall v \in V$ y $\forall \lambda \in K$

Cuerpo de escalares ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...)

Estas operaciones cumplen:

(SV1) $v+w \in V, \ \forall v,w \in V$ (Interna)

(SV2) $(v+w)+z = v+(w+z) \quad \forall v,w,z \in V$ (Asociativa)

(SV3) Existe un elemento, $0 \in V$ que cumple que

$$v+0=v \quad \forall v \in V \quad \text{(Neutro)}$$

Vector "cero" o "nulo"

(SV4) Dado $v \in V$, existe $v' \in V$ tal que

$$v+v'=0 \qquad \text{(Opuesto)}$$

(SV5) $v+w = w+v \quad \forall v,w \in V$ (Conmutativa)

(PV1) Para el $1 \in K$, se tiene que $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

(PV2) Dados $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$,

$$(\lambda\mu)\cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$

Producto de dos escalares en K

Producto de un escalar por un vector.

(PV3) Dado $\lambda \in K$ y $v,w \in V$

$$\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

(PV4) Dados $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$

$$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v.$$

(PV5) Para $\lambda \in K$, $v \in V$, $\lambda v \in V$.

Son K-e.v's...

Cuerpo de escalares.

Ej Son $\mathbb{R}$-e.v's:

a) $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones:

- Suma: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- Prod. por escalar: $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para comprobar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-e.v. (o espacio vectorial real) hay que ver que se cumplen todas las propiedades.

(SV1) Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2 \ ✓$$

(SV2) Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$$

$$= ([x_1 + y_1] + z_1, [x_2 + y_2] + z_2)$$

Asociativa en $\mathbb{R}$

$$= (x_1 + [y_1 + z_1], x_2 + [y_2 + z_2])$$

$$= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$

$$= (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)]. \ ✓$$

(SV3) El neutro es $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) + (0,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) \ ✓$$

(SV4) Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, su opuesto es $(-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2)) = (0,0) \ ✓$$

(SV5) Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Conmutativa en $\mathbb{R}$

$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$$

$$= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \ ✓$$

(PV5) Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbb{R}^2 \checkmark$$

(PV1) $1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2) \checkmark$

(PV2) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(\lambda\mu) \cdot (x_1, x_2) = ((\lambda\mu) x_1, (\lambda\mu) x_2)$$

Asociativa del producto en $\mathbb{R}$

$$= (\lambda \cdot (\mu x_1), \lambda \cdot (\mu x_2))$$

$$= \lambda \cdot (\mu x_1, \mu x_2)$$

$$= \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, x_2)). \checkmark$$

(PV3) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$= (\lambda \cdot (x_1 + y_1), \lambda \cdot (x_2 + y_2))$$

Distibutiva en $\mathbb{R}$

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\lambda y_1, \lambda y_2)$$

$$= \lambda(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2) \checkmark$$

(PV4) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\underline{(\lambda + \mu)} \cdot (x_1, x_2) = ((\lambda + \mu) x_1, (\lambda + \mu) x_2)$$

Distrib. en $\mathbb{R}$

$$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2)$$

$$= \lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1, x_2) \checkmark$$

Esto demuestra que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-e.v.

Son $\mathbb{R}$-e.v's... $\quad K^n$

K

b) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se comprueban las propiedades como para $\mathbb{R}^2$.

$K \qquad\qquad K$

c) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & & x_{mn} \end{pmatrix} : x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

Matrices de dimensiones $m\times n$ con coeficientes reales.

- $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}+y_{m1} & \cdots & x_{mn}+y_{mn} \end{pmatrix}$

- $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \cdots & \lambda x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda x_{m1} & \cdots & \lambda x_{mn} \end{pmatrix}$

$K \qquad\qquad K$

d) $\mathbb{R}[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \}$

Polinomios con coeficientes reales en K (de grado arbitrario)

- Para sumar polinomios, se suman los coeficientes correspondientes al mismo grado

$(5x^3 + 2x^2 - x + 1) + (3x^2 - x + 5) = 5x^3 + 5x^2 - 2x + 6$

- Para multiplicar por un nº real, se multiplican todos los coeficientes

$3 \cdot (2x^2 - x + 6) = 6x^2 - 3x + 18$

e) Funciones definidas en $[0,1]$ con conj. de llegada $\mathbb{R}$. K

$$\mathbb{R}^{[0,1]} = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ función} \}$$

K K

• Suma $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos x$

$$(f+g)(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = f(x) + g(x)$$

• Producto

$$(2f)(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x = 2 \cdot f(x)$$

En general,

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

de elementos de K

f) Sucesiones reales

$$S = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \}$$

K

$(1,0,0,1,1,0,0,1,1,1,\dots)$

$(1,-1,1,-1,1,-1,\dots)$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$

• Suma

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

Se suma término a término

• Producto Para $\lambda \in \mathbb{R}$, K

$$\lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n)$$

Se multiplica cada término por λ.

Es como una "generalización" de $\mathbb{R}^n$. K^n

Ej Todos los ejemplos anteriores se pueden generalizar si en lugar de $\mathbb{R}$ usamos un cuerpo K cualquiera

Pensar en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{C}$.

Q ¿Cómo se demuestra que algo no es un K-e.v?

Basta encontrar una propiedad que no se cumpla.

Ej ¿Son $\mathbb{R}$-e.v's?

a) $\mathbb{R}_n[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,\ a_i \in \mathbb{R},\ n \geq 1 \text{ fijo} \}$

La suma de elementos debe ser interna (SV1), pero...

$$x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{R}_2[x] \quad y \quad -x^2 + 5x - 4 \in \mathbb{R}_2[x]$$

Sin embargo, al sumar,

$$(\cancel{x^2} + 3x + 1) + (\cancel{-x^2} + 5x - 4) = 8x - 3 \notin \mathbb{R}_2[x]$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_n[x]$ no es un $\mathbb{R}$-e.v.

b) $\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f(0) = 1 \}$

Si fuera un $\mathbb{R}$-e.v. tendría que haber una función "cero", que al sumarla a cualquier otra, dé la otra,

f_0

$$(f + f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$$

Pero si se cumple que $f_0(0) = 1$, tendríamos

$$\underbrace{(f + f_0)(0)}_{} = f(0) + f_0(0) = 1 + 1 = 2$$

Esta función no está en el conjunto

porque debería ser 1 //

$\Rightarrow$ No hay "función cero".

$\Rightarrow$ No es un $\mathbb{R}$-e.v.

COMBINACIONES LINEALES

Def (Combinación lineal) Sea V un K-e.v. y sea $S \subseteq V$ un subconjunto no vacío de vectores. Dado un vector $v \in V$, decimos que v es **combinación lineal** de elementos de S, si existe un nº finito de vectores $u_1, \dots, u_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Obs: El vector $0 \in V$ siempre es comb. lin. de cualquier conj. finito de vectores. Basta tomar $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ej En $\mathbb{R}^4$, como $\mathbb{R}$-e.v., consideramos los vectores.

$$u_1 = (1,2,1); \quad u_2 = (2,0,-3); \quad u_3 = (0,2,3); \quad u_4 = (-2,-4,-2)$$
$$u_5 = (-3,8,16)$$

¿Es $v = (2,6,8)$ comb. lineal de $S = \{u_1, \dots, u_5\}$?

En caso afirmativo, ¿es única?

Buscamos si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ con

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_5 u_5$$

$$(2,6,8) = \lambda_1 (1,2,1) + \lambda_2 (2,0,-3) + \lambda_3 (0,2,3) + \lambda_4 (-2,-4,-2) + \lambda_5 (-3,8,16)$$

$$(2,6,8) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 - 3\lambda_5,\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 - 4\lambda_4 + 8\lambda_5,\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 + 16\lambda_5)$$

Igualando coordenadas,

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 - 3\lambda_5 = 2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 - 4\lambda_4 + 8\lambda_5 = 6 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 + 16\lambda_5 = 8 \end{cases}$$

Es un sist. lineal de 3 ecs con 5 incógnitas $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$.

Resolviendo el sistema (por el método de Gauss) llegamos a que es compatible indeterminado con solución:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_4 - \lambda_5 - 4 \\ \lambda_2 = 2\lambda_5 + 3 \\ \lambda_3 = -3\lambda_5 + 7 \end{cases}$$

¡ Como el sist. es compatible, v es comb. lin. de elem's de S ✓

Para encontrar comb. lin. concretas, damos valores a los parámetros λ_4 y λ_5. Por ejemplo:

- $\lambda_4 = \lambda_5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = 7$

$$v = -4u_1 + 3u_2 + 7u_3 + 0u_4 + 0u_5$$

- $\lambda_4 = 0,\ \lambda_5 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -5;\ \lambda_2 = 5;\ \lambda_3 = 4$

$$v = -5u_1 + 5u_2 + 4u_3 + 0u_4 + u_5.$$

La comb. lin. de v <u>no</u> es única.

Ej En $\mathbb{R}[x]$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Consideramos:

$$p_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 3; \qquad p_2(x) = x^3 - 5x^2 - 4x - 9$$

¿Es el polinomio $q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ com. lin. de $S = \{p_1(x), p_2(x)\}$?

Buscamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$q(x) = \lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 p_2(x).$$

$$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6 = \lambda_1 (x^3 - 2x^2 - 5x - 3) + \lambda_2 \cdot (x^3 - 5x^2 - 4x - 9)$$

$$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6 = (\lambda_1 + \lambda_2)x^3 + (-2\lambda_1 - 5\lambda_2)x^2 + (-5\lambda_1 - 4\lambda_2)x + (-3\lambda_1 - 9\lambda_2)$$

Igualamos coeficientes:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=2 \\ -2\lambda_1-5\lambda_2=-2 \\ -5\lambda_1-4\lambda_2=12 \\ -3\lambda_1-9\lambda_2=-6 \end{cases}$$

Es un sist. lin. de 4 ecuaciones y 2 incógnitas (λ_1, λ_2).

Si resolvemos este sistema, llegamos a que es incompatible. Esto nos dice que no existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$q(x)=\lambda_1 p_1(x)+\lambda_2 p_2(x),$$

es decir, $q(x)$ <u>no</u> es comb. lin de $S=\{p_1(x), p_2(x)\}$.

Ej En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-e.v. Consideramos

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ comb. lin de $S=\{M_1, M_2, M_3\}$?

Buscamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ con

$$M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+\lambda_3 M_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1+\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Igualando elementos,

$$\begin{cases} \lambda_1 \quad +\lambda_3=1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad =1 \\ -\lambda_2 \quad =1 \\ -\lambda_1 \quad +\lambda_3=-3 \end{cases}$$

Es un sist. lin. de 4 ecuaciones con 3 incógnitas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Si lo resolvemos, llegamos a que es un sistema compatible determinado cuya solución es

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = -1.$$

Esto quiere decir que M es comb. lin de $S = \{M_1, M_2, M_3\}$ y se puede escribir de forma única como

$$M = 2M_1 - M_2 - M_3.$$

Conclusiones:

- Un vector no siempre es comb. lin. de otros.
- Cuando lo es, puede ser de forma única o no.
- Al estudiar combinaciones lineales tenemos que resolver sistemas lineales.

SISTEMAS DE GENERADORES

Un K-e.v. V puede "construirse" a partir de unos cuantos vectores, llamados generadores: cualquier vector de V se puede expresar a través de ellos.

Def (Sist. de generadores) Sea V un K-e.v. Decimos que un conjunto no vacío de vectores, $S = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq V$ es un sistema de generadores de V si para cualquier $v \in V$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

↑ Cualquier $v \in V$ se puede escribir como combinación lineal de $u_1, \ldots, u_m$.

Ej En $\mathbb{R}^4$, estudiar si

$$S=\{(1,0,0,-1),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$$

es un sistema de generadores.

Tomamos $v\in\mathbb{R}^4$ arbitrario, a saber, $v=(x,y,z,t)$ con $x,y,z,t\in\mathbb{R}$. Buscamos $\lambda_1,\dots,\lambda_4\in\mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z,t)=\lambda_1(1,0,0,-1)+\lambda_2(1,1,0,0)+\lambda_3(0,1,1,0)+\lambda_4(0,0,1,1).$$

Haciendo cuentas a la derecha e igualando coordenadas, llegamos a que debe darse que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 & = & x \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & y \\ \lambda_3+\lambda_4 & = & z \\ -\lambda_1+\lambda_4 & = & t \end{array}\right.$$

Es un sist. lin. con 4 ecs y 4 incógnitas $(\lambda_1,\dots,\lambda_4)$

Estos son números concretos.

Para que S sea un sist. de generadores, el sist. lin. anterior debe ser compatible para cualesquiera valores de x,y,z,t. Resolvamos el sist. por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ -1 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{F_4=F_4+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & t+x \end{array}\right) \xrightarrow{F_4=F_4-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t+x-y \end{array}\right) \xrightarrow{F_4=F_4+F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t+x-y+z \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A = 4 = \operatorname{rang} A^*$ $\overset{\text{T.R-F}}{\Longrightarrow}$ El sist. es compatible

$\Longrightarrow$ S es un sist. de gen de $\mathbb{R}^4$.

Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x & (I) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y & (II) \\ \lambda_3 + \lambda_4 = z & (III) \\ \boxed{\lambda_4 = x - y + z + t} & (IV) \end{cases}$$

$(III) \longrightarrow \lambda_3 + x - y + z + t = z \longrightarrow \boxed{\lambda_3 = -x + y - t}$

$(II) \longrightarrow \lambda_2 - x + y - t = y \longrightarrow \boxed{\lambda_2 = x + t}$

$(I) \longrightarrow \lambda_1 + x + t = x \longrightarrow \boxed{\lambda_1 = -t}$

Hallar la forma de escribir $v = (0, 1, 2, -1) \in \mathbb{R}^4$ como comb. lin. de los vectores del sist. de generadores S

Sabemos que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$$

Buscamos los λ_i para $v = (\overset{x}{0}, \overset{y}{1}, \overset{z}{2}, \overset{t}{-1})$ pero... ¡hemos resuelto el sist. anterior en general, para cualesquiera x, y, z, t!

$\lambda_1 = -t \leadsto \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = x + t \leadsto \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = -x + y - t \leadsto \lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = x - y + z + t \leadsto \lambda_4 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v = u_1 - u_2 + 2u_3}$$

Obs: Para comprobar si un conjunto de vectores son generadores:

1º Escribimos los vectores como columnas de una matriz.

2º La última columna (términos independientes) son nºs genéricos $(x, y, z, t\ldots)$

3º Resolvemos el sistema por Gauss (por ej.)

- Si es compatible para cualesquiera valores de $x, y, z, t, \ldots$ $\Rightarrow$ S es un sist. de generadores.
- Si no, S no lo es.

Ej En $\mathbb{R}^3$ consideramos

$S_1 = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$

$S_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (1,-1,1)\}$

¿Son sist. de generadores de $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{S_1}$ Utilizamos el método que dedujimos en el ejemplo anterior:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_3 - f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_3 - f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right)$$

Si $z = 1, x = 0, y = 0$, $z - x - y = 1$

$\Rightarrow$ rang $A = 2$, rang $A^* = 3 \overset{R-F}{\Longrightarrow}$ Sist. Incompat.

Como hemos encontrado un caso en que el sist. no es compatible para ciertos valores de x, y, z, S_1 no es un sist. de generadores de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{S_2}$ $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_3 - f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & 0 & z-x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 = f_3 - f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & -2 & 1 & z-x-y \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang } A = 3 \\ \text{rang } A^* = 3 \end{array}\right\} \overset{R-F}{\Longrightarrow}$ Sist. compat.

Escribir $v=(2,-1,1)\in\mathbb{R}^3$ como comb. lin. de elementos de S_3.

x y z

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 \quad\quad +\lambda_3+\lambda_4=2 & (\mathrm{I}) \\ \lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=-1 & (\mathrm{II}) \\ -2\lambda_3+\lambda_4=0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$(\mathrm{III}) \longrightarrow \boxed{\lambda_4=2\lambda_3}$

$(\mathrm{II}) \longrightarrow \lambda_2+\lambda_3-2\lambda_3=-1 \longrightarrow \boxed{\lambda_2=-1+\lambda_3}$

$(\mathrm{I}) \longrightarrow \lambda_1+\lambda_3+2\lambda_3=2 \longrightarrow \boxed{\lambda_1=2-3\lambda_3}$

La sol. depende de λ_3 $\Rightarrow$ No hay una forma única de escribir v.

- Para $\lambda_3=0$, $\quad \lambda_4=0;\ \lambda_2=-1;\ \lambda_1=2$

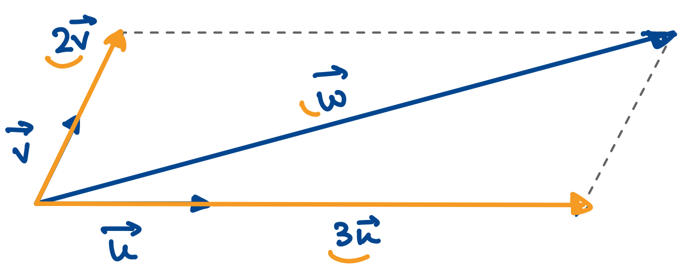
$\rightarrow v=2u_1-u_2$

- Para $\lambda_3=1$, $\quad \lambda_4=2;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=-1$

$\rightarrow V=-u_1+u_3+2u_4$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dependencia lineal: idea



$$3\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$$

$$\Updownarrow$$

$$3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$$

Como podemos poner $\vec{w}$ como comb. lin. de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, decimos que $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente dependientes

Esto es equivalente a que podemos escribir $\vec{0}$ como comb. lin. de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sin que todos los coeficientes sean 0.

Def (Dependencia lineal) Sea V un K-e.v y sea $S \subseteq V$ (podría ser infinito!). Decimos que S es un conjunto **linealmente dependiente** si podemos encontrar un nº finito de elementos de S, a saber, $u_1, \dots, u_m \in S$, y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tales que podemos escribir

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$$

con algún (o algunos) $\lambda_i \neq 0$.

Ej En $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, como $\mathbb{R}$-e.v. consideramos:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Es S linealmente dependiente?

Buscamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operamos e igualamos entradas:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 - 7\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de 6 ecs con 3 incóg, llegamos a:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{5}{2}\lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{-3}{2}\lambda_3 \end{cases}$$

Si $\lambda_3 = 2 \rightarrow \lambda_1 = -5;\ \lambda_2 = -3$ y tenemos una solución $\boxed{\text{no trivial}}$ (al menos).

No todos los λ_i son 0

$\Rightarrow$ S es linealmente dependiente.

De hecho,

$$-5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def (Independencia lineal) Sea V un K-e.v y sea $S \subseteq V$. Decimos que S es un conjunto linealmente independiente si para cualquier subconjunto finito de vectores de S, a saber, $u_1, \ldots, u_m \in S$, se tiene que

$$\boxed{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0}$$

La única forma de escribir 0 como comb. lin. de $u_1, \ldots, u_m$ es con los λ_i's todos cero.

Lema Si $\{u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m\}$ es lin indep, entonces $\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ también lo es.

DEM

- Si $m=1$, $\{u_1\}$ es siempre linealmente indep, porque

$$\lambda_1 u_1 = 0 \overset{u_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda_1 = 0 \checkmark$$

Cualquier subconjunto con un solo vector no nulo es siempre lin. indep.

- Si $m > 1$, sea $\{u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m\}$ lin. indep, lo que quiere decir que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{m-1} u_{m-1} + \lambda_m u_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = \lambda_m = 0$$

Sup. que $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ es lin. dep, esto es, que existen $\mu_1, \dots, \mu_{m-1} \in K$ no todos nulos tales que

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{m-1} u_{m-1} = 0$$

Pero esto nos diría que

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{m-1} u_{m-1} + 0 \cdot u_m = 0$$

con no todos los μ_i nulos ¡Contrad!

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_{m-1}, u_m\}$ sería lin. dep. ∎

Corolario Si V es un K-e.v. y $S \subseteq V$ es un conjunto finito, $S = \{u_1, \dots, u_m\}$, para saber si S es lin. indep, basta resolver

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$$

- Si la única sol. es $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \Rightarrow S$ lin. indep
- Si no, $\Rightarrow S$ lin. dep.

Ej En $\mathbb{R}^4$, como $\mathbb{R}$-e.v, decidir si son lin dep o lin indep:

← 3 vectores

a) $S_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

Tomamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \cdot (1,0,0,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,0,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

Operando e igualando componentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow S_1 \text{ lin indep}$$

Obs: Si resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

rang 3

$$\left.\begin{array}{l} \text{rang } A = 3 \\ \text{rang } A^* = 3 \\ \text{nº incóg} = 3 \end{array}\right\} \overset{RF}{\Rightarrow} \text{Sist. Compat. Det}$$

b) $S_2 = \{ \underbrace{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)}_{\text{4 vectores}} \}$

$$\lambda_1 (1,0,0,0) + \lambda_2 (1,1,0,0) + \lambda_3 (1,1,1,0) + \lambda_4 \cdot (1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (I) \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (II) \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (III) \\ \boxed{\lambda_4 = 0} & (IV) \end{cases}$$

Obs:

rang 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

rang $A = 4 =$ rang A^*

nº incóg $= 4$

(III) $\to$ $\boxed{\lambda_3 = 0}$

(II) $\to$ $\boxed{\lambda_2 = 0}$

(I) $\to$ $\boxed{\lambda_1 = 0}$

$\Rightarrow$ S_2 lin. indep.

$S_3 = \{ \underbrace{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)}_{\text{5 vectores}} \}$

$$\lambda_1 (1,0,0,0) + \lambda_2 (1,1,0,0) + \lambda_3 (1,1,1,0) + \lambda_4 (1,1,1,1) + \lambda_5 (1,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 & (I) \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (II) \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 & (III) \\ \lambda_4 = 0 & (IV) \end{cases}$$

Obs

rango 5

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang $A = 4 =$ rang A^*

nº incóg $= 5$

$\Downarrow$ RF

Sist. Compat. Indet

(IV) $\boxed{\lambda_4 = 0}$

(III) $\lambda_3 + \lambda_5 = 0 \to \boxed{\lambda_3 = -\lambda_5}$

(II) $\lambda_2 + (-\lambda_5) = 0 \to \boxed{\lambda_2 = \lambda_5}$

(I) $\lambda_1 + \lambda_5 + (-\lambda_5) + 0 + \lambda_5 = 0 \to \boxed{\lambda_1 = -\lambda_5}$

Solución

$\lambda_1 = -\lambda_5$; $\lambda_2 = \lambda_5$; $\lambda_3 = -\lambda_5$; $\lambda_4 = 0$

$\Rightarrow$ S es lin. dep.

Obs: ¿Qué relación hay entre la dependencia lineal y las matrices escalonadas?

(*) Como todos los sistemas son homogéneos, van a ser compatibles.

2º

- Si son determinados $\leftrightarrow$ Rang A = Nº vect. de S S. lin. ind.
- Si son indeterminados $\leftrightarrow$ Rang A $\neq$ Nº vect. de S S lin. dep

1º (*) La matriz de coeficientes está formada por los vectores de S por columnas.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA: EJEMPLOS

Ej Consideramos, en $\mathbb{R}[x]$, como $\mathbb{R}$-e.v. el siguiente conjunto:

$$S = \{ x^3 + 2x^2 - x + 1,\ -x^2 + x + 1,\ -x^3 - x^2 + x - 1,\ 2x^3 + x^2 + x + 2 \}$$

¿Es S lin. dep. o indep?

Buscamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1 (x^3 + 2x^2 - x + 1) + \lambda_2 (-x^2 + x + 1) + \lambda_3 (-x^3 - x^2 + x - 1)$$
$$+ \lambda_4 (2x^3 + x^2 + x + 2) = 0$$

$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Operando y agrupando por grado,

$$(\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4)\, x^3 + (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)\, x^2$$
$$+ (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\, x + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4) = 0$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow}$$

¡Al hacer Gauss, no va a cambiar!

¡La matriz de coef. son los coef. de cada polinomio por columnas!

Usamos el algoritmo del vídeo anterior...

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rang $A = 4 = N^o$ de polinomios de S

$\Rightarrow$ $\boxed{S \text{ es lin. indep}}$

Ej Consideramos, en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, como $\mathbb{R}$-e.v, el conj.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Es S un conj. lin. indep. o dep?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 2$

N^o elem's de $S = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{S \text{ es lin. dep}}$

Ej Sea K un cuerpo. Definimos, en K^n, como K-e.v., los vectores canónicos o estándar:

$\leftarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\ldots$ $\quad$ $\hookleftarrow \mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

e_i son todo ceros, salvo un 1 en la posición i

Demostrar que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es un conj. lin. indep.

Como son vectores, basta ponerlos por columnas y hallar el rango de la matriz.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz identidad de orden } n \ (I_n)}$$

rang $I_n = n = N^o$ de vectores.

$\Rightarrow$ $\boxed{\{e_1, \ldots, e_n\} \text{ es lin indep.}}$

Ej Sea V un K-e.v. y sean $u, v \in V$ con $u \neq v$ y ninguno de ellos nulo. Demostrar que:

$\{u, v\}$ es lin. dep $\Leftrightarrow$ u es múltiplo de v o viceversa.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\{u, v\}$ es lin. dep, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, no ambos nulos con $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$. sup. que $\lambda_1 \neq 0$.

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \longrightarrow \lambda_1 u = -\lambda_2 v \rightarrow u = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v \quad \leftarrow K$$

Esto nos dice que u es múltiplo de v.

Si $\lambda_2 \neq 0$, se hace análogamente ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ Sup. que u es múltiplo de v:

$u = \lambda v \longrightarrow u - \lambda v = 0$ es una comb. lin de u y v no trivial igual a 0

$\hookleftarrow \lambda \in K$

$\Rightarrow \{u,v\}$ lin. dep. ✓

BASES

Def (Base) Sea V un K-e.v. Decimos que $B \subseteq V$ es una base de V si es un conjunto generador y lin. indep.

— Algoritmo para saber si un conjunto es una base —

Sea $B \subseteq V$ un subconjunto finito y no vacío de V,

$$B = \{u_1, \ldots, u_m\}$$

1º- Poner $u_1, \ldots, u_m$ como columnas de una matriz A

2º Escribir la columna de términos indep's genérica.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \uparrow & & \uparrow & x_1 \\ u_1 & \cdots & u_m & x_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \vdots \\ & & & x_k \end{array}\right) \longleftarrow \text{Matriz } A^*$$

Matriz A

3º B lin indep $\Longleftrightarrow$ rang $A = m$ ↙ nº de vectores de B

4º B generadores $\Longleftrightarrow$ rang $A =$ rang A^* para cualesquiera valores de $x_1, \ldots, x_k$.

Ej Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son bases:

$S_1 = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z+t \end{array}\right)$$

- rang $A = 3 =$ nº de vectores en $S_1 \Rightarrow S_1$ lin indep ✓
- Para $x=0, y=0, z=0, t=1$, rang $A \neq$ rang $A^* \Rightarrow S_1$ no gen ×

$\Rightarrow S_1$ no es base.

$S_2 = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,0,0,0), (1,1,1,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -x+y+z+t \end{array}\right)$$

- rang $A = 4$, pero S_2 tiene 5 vectores $\Rightarrow$ S_2 <u>no</u> lin indep ✗
- rang $A = 4 =$ rang A^* para cualesquiera valores de x, y, z, t

$\Rightarrow S_2$ sist. generadores ✓

$\Rightarrow S_2$ <u>no</u> es base

$S_3 = \{(1,0,0,0), (1,0,1,0), (2,1,1,0)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

- rang $A = 2$ y S_3 tiene 3 vectores $\Rightarrow S_3$ <u>no</u> es lin. indep ✗
- Para $x = y = 0$, $z = t = 1$, rang $A \neq$ rang A^* $\Rightarrow S_3$ <u>no</u> genera ✗

$\Rightarrow S_3$ <u>no</u> es base

$S_4 = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,0,0,0)\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -x+y+z+t \end{array}\right)$$

- rang $A = 4 =$ nº vect. de S_4 $\Rightarrow$ S_4 lin indep ✓
- rang $A =$ rang A^* siempre $\Rightarrow$ S_4 sist. generadores ✓

$\Rightarrow$ <u>S_4 es base de $\mathbb{R}^4$</u>

Ej: Bases canónicas o estándar.

Los siguientes conjuntos se llaman **bases canónicas o estándar** de sus respectivos espacios vectoriales:

- En $\mathbb{R}^n$ definimos En general, K^n para K cuerpo

$$e_1=(1,0,\ldots,0);\ e_2=(0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ e_n=(0,0,\ldots,1)$$

El conj. $\mathcal{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$

- En $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos En general K, para K cuerpo.

$$E_{ij} = \text{Matriz con todo ceros, salvo } e_{ij}=1$$

El conj $\mathcal{B}=\{E_{ij}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ es base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Polinomios de grado menor o igual que n

- En $\mathbb{R}_n[x]=\{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 : a_i\in\mathbb{R}\}$, el conjunto $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ es base.

En general, $K_n[x]$ para K cuerpo

- En $\mathbb{R}[x]$, el conjunto de <u>todos</u> los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, el conjunto

¡La base tiene infinitos elementos!

En general, $K[x]$

$$\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$$

es base

— Propiedad fundamental de una base —

<u>Teorema</u> Sea V un K-e.v y $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_m\}$

$\mathcal{B}$ base de $V \iff$ $\forall v\in V$ existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in K$ <u>únicos</u> tales que $v=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_mu_m$.

DEM:

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $0 \in V$, por hipótesis, la única forma de escribirlo como

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0 \quad \text{es con} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

Esto nos da la <u>independencia lineal</u>.

Además como $\forall v \in V$ se puede escribir como comb. lin. de $u_1, \dots, u_m$, esto nos dice que es un <u>sist. de generadores</u>

$$\Rightarrow \mathcal{B} \text{ es base de } V \checkmark$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $v \in V$. Como $\mathcal{B}$ es un sist. de generadores, podemos escribirlo seguro como

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = v$$

Falta ver que $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son únicos, así que supongamos que v se puede escribir de dos formas:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_m u_m$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_m - \mu_m) u_m = 0$$

Pero como $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ son lin. indep, necesariamente

$$\begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_m - \mu_m = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_m = \mu_m . \end{cases} \checkmark$$

Def (Coordenadas) Sea V un K-e.v. y $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base de V. Dado $v \in V$, sabemos que podemos escribir

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$$

de forma única. Los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se llaman coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$ y se escribe:

$$v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)_{\mathcal{B}}$$

BASES Y COORDENADAS: EJEMPLOS

Ej En $\mathbb{R}^4$,

a) Demostrar que los siguientes conjuntos son bases:

$$\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$$

El conj. $\mathcal{B}_0$ es, de hecho, la base canónica.

Para $\mathcal{B}$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

- rang $A = 4 = N^o$ vect $\Rightarrow \mathcal{B}$ lin. indep
- rang A = rang A^* siempre $\Rightarrow \mathcal{B}$ sist. generad.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar las coordenadas de $v = (1,-1,0,2)$ en $\mathcal{B}_0$ y en $\mathcal{B}$.

$\boxed{\mathcal{B}_0}$

$$(1,-1,0,2) = \lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1)$$
$$= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 2$

$$v = (1,-1,0,2)_{\mathcal{B}_0}$$

Los vectores, si no nos dicen lo contrario, se expresan en la base estandar

$\boxed{\mathcal{B}}$

$$(1,-1,0,2) = \lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(1,1,0,0) + \lambda_3(1,1,1,0) + \lambda_4(1,1,1,1)$$
$$= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4, \ \lambda_3+\lambda_4, \ \lambda_4)$$

Igualando componentes,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = -1 \\ \lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vectores por columnas ← Vector v

Resolviendo $\rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = -2;\ \lambda_4 = 2.$

$\Rightarrow \quad v = (2, -1, -2, 2)_B$

---

obs:

1- Un espacio vectorial no tiene una única base.

2- Los vectores se dan en la base estándar por defecto.

3- Un mismo vector tiene coordenadas distintas en diferentes bases.

4- Las bases son como "sistemas de referencia".

Ej: En $\mathbb{R}_3[x]$,

a) Demostrar que los siguientes conjuntos son bases:

$B_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$

El conj. B_0 es, de hecho, la base canónica.

Para B,

$$\begin{array}{r} T1 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ x^2 \rightarrow \\ x^3 \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \partial \end{array}\right)$$

- rang $A = 4 = N^o$ vectores $\Rightarrow B$ lin indep
- rang A = rang A^* siempre $\Rightarrow B$ sist. generad

$\Rightarrow B$ es base de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Hallar las coordenadas de $p(x) = 2+x-x^2+x^3$ en las bases B_0 y B.

$\boxed{B_0}$ $\quad 2+x-x^2+x^3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2; \ \lambda_2 = 1; \ \lambda_3 = -1; \ \lambda_4 = 1.$

$$p(x) = (2,1,-1,1)_{B_0}$$

$\boxed{B}$

$$2+x-x^2+x^3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (1+x) + \lambda_3 (1+x^2) + \lambda_4 (1+x^3)$$
$$= \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}\cdot 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3$$

Igualando coeficientes,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 1 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Coef. de los polinomios por columnas

Coef. de $p(x)$

Resolviendo, $\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 1; \ \lambda_3 = -1; \ \lambda_4 = 1.$

$$p(x) = (1,1,-1,1)_B$$

ESPACIOS VECTORIALES FINITAMENTE GENERADOS

Def (Espacio finitamente generado) Sea V un K-e.v. Decimos que es finitamente generado si existe un subconjunto $S \subseteq V$ finito que es generador de V.

Ej

- Si $V = \{0\}$ es f.g. porque $S = \{0\}$ es un conj. de gen.
  También lo es, por convenio, $S = \emptyset$.

- Los $\mathbb{R}$-e.v.'s $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}_n[x]$ son finitamente generados

---

Objetivo: Probar que todos los espacios vectoriales finitamente generados tienen una base finita, aprender a encontrar bases y estudiar qué cardinal tienen.

Lema Sea V un K-e.v. y sea $S \subseteq V$ un conjunto finito de vectores linealmente independientes, pero que <u>no</u> generen V, a saber,

$$S = \{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Entonces, podemos encontrar $v \in V$ tal que

$$S' = S \cup \{v\}$$

sea linealmente independiente.

DEM: Supongamos que $\forall v \in V$, $S' = S \cup \{v\}$ no es linealmente independiente. Existen entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda \in K$ no todos cero tales que

$$(*) \quad \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \lambda v = 0.$$

Necesariamente $\lambda \neq 0$, porque si lo fuera, tendríamos

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$ ← ¡Todos serían cero!

Indep. lin. de S

Pero en este caso, despejando de $(*)$

$$\lambda v = -\lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_k u_k$$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 0} v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda} u_k$$

y como esto ocurre con cualquier $v \in V$, tendríamos que $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ es un sist. de generadores. ¡Contrad!

$\Rightarrow$ Necesariamente existe $v \in V$ tal que

$$S' = S \cup \{v\} \text{ es lin. indep.}$$

Lo que nos dice el Lema es que dado un conj. de vectores lin. indep que no sea generador, podemos añadir otro vector lin. indep.

Ej: En $\mathbb{R}^4$, consideramos el conjunto

$$S = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$$

que es lin. indep. y no es generador. Añadir vectores que aseguren que el conj. resultante es lin. indep.

Vamos probando, pues lo que buscamos es añadir una columna de modo que el rango de la siguiente matriz sea máximo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3 \rightarrow$ Los tres vect. son lin. indep.

Añadimos una columna

$$S' = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)\}$$

Como S' no es generador (compruébalo) ¡podemos añadir otro vector!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rang $A = 4 \rightarrow$ Los 4 vect. son lin. indep.

$$S'' = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,0,1,0)\} \text{ lin. indep.}$$

De hecho, ahora S'' sí que genera $\Rightarrow S''$ es una base de $\mathbb{R}^4$

Este ejemplo nos da una idea de cómo construir bases, pero hay detalles que debemos analizar:

- ¿Siempre podemos añadir vectores hasta "completar" una base?
- ¿Qué ocurre si el conjunto original, S, sí es un sistema de generadores?

Lema 2 Sea V un K-e.v. y $S \subseteq V$ un subconjunto finito de generadores de V. Supongamos que $S' \subseteq S$,

$$S' = \{u_1, \ldots, u_m\}$$

es linealmente independiente, pero no generador. Entonces, existe $v \in S$ tal que

$$S' \cup \{v\} \text{ es lin. indep}$$

↑ Podemos elegir un nuevo vector lin. indep. de los que ya tenemos en S' de entre los que quedan en S.

"Esto es falso"

DEM: Supongamos que en S, no existe un v que sea lin. indep. de los $u_1, \ldots, u_m$ que ya tenemos en S', esto es, $S' \cup \{v\}$ es lin. dep. para cualquier $v \in S$:

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \lambda v = 0 \quad , \text{ con } \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda \in K$$

no todos nulos. De hecho, $\lambda \neq 0$, pues si lo fuera tendríamos

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$$

por independencia de $S' = \{u_1, \ldots, u_m\}$, lo cual nos diría que $S' \cup \{v\}$ serían lin. indep y no lo es.

$\circledast \Rightarrow \lambda v = -\lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_m u_m$

$$\Rightarrow v = \overbrace{\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)}^{\mu_1} u_1 - \ldots \overbrace{\left(-\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)}^{\mu_m} u_m = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_m u_m.$$

Como esto ocurre con todos los $v \in S$, a saber,

$$S = \{\underbrace{u_1, \ldots, u_m}_{S'}, \underbrace{u_{m+1}, \ldots, u_n}_{\text{Los posibles } v\text{'s}}\}$$

podemos escribir $u_{m+1}, \ldots, u_n$ como comb. lin. de los $u_1, \ldots, u_m$ y como S es un sist. de generadores para cualquier $w \in V$,

$$w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \underbrace{\alpha_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \alpha_n u_n}_{\text{En realidad dependen de } u_1, \ldots, u_m}$$

$\Rightarrow \underbrace{\{u_1, \ldots, u_m\}}_{\text{Es } S'\text{, que hemos supuesto que no es generador}}$ es un sist. de generadores. ¡CONTRADICCIÓN!

$\blacksquare$

Proposición Sea V un K-e.v. finitamente generado por un subconjunto $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Entonces, S contiene una base de V que, de hecho, tiene una base finita.

DEM.

- Si $V = \{0\}$, o bien $S = \emptyset$, o bien $S = \{0\}$ y es una base. ✓ Supongamos que $V \neq \{0\}$ y que $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sist. de generadores.

Tomamos $u_1 \in S$ $\overset{u_1 \neq 0}{\text{y}}$ definimos $S' = \{u_1\}$, que es linealmente independiente. Si así S' es base; ✓ si no,

$\lambda u_1 = 0 \overset{u_1 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = 0$

por el Lema 2 anterior podemos añadir a S' otro elem. de S, a saber, $u_2' \in S$ tal que $S' = \{u_1, u_2'\}$ sea lin. indep. Si S' es base; ✓ si no, podemos encontrar $u_3' \in S$ con $S' = \{u_1, u_2', u_3'\}$ lin. indep.

Repetimos este proceso hasta que no podamos añadir más vectores lin. indep's a S', que quedará

$$S' = \{u_1, u_2', \ldots, u_m'\} \quad \text{con} \quad m \leq \underset{\text{N° elem's de } S}{n}$$

En este caso, afirmamos que S' es una base de V.

- S' lin. indep. por construcción ✓
- S' es un sist. de generadores por el mismo argumento que hemos usado en la dem. del Lema 2. ✓

La demostración anterior nos da un algoritmo para hallar una base de V a partir de un sist. finito de generadores, $S \subseteq V$: vamos tomando vectores de S que sean lin. indep's (o eliminando los que sean lin. dep) hasta obtener un sist de generadores lin. indep.

Ej En $\mathbb{R}^4$ consideramos

$$S = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (1,1,-1,-1), (1,1,1,-1), (1,-1,1,-1)\}$$

a) Demostrar que S es un sist. de generadores.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x+y+z+t \end{array}\right)$$

rang $A = 4 = $ rang $A^* \Rightarrow$ Sist. de gen ✓ ¡No es base!

rang $A = 4 < 6 = $ nº vectores $\Rightarrow$ S lin. dep

b) Hallar un subconj. de S que sea base de $\mathbb{R}^4$.

Vamos tomando vectores:

$S' = \{(1,-1,0,0)\}$ es lin. indep. por ser un único vector ✓

$S' = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0)\}$ lin indep ✓

$S' = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), \cancel{(0,1,-1,0)}\}$ lin dep ✗

$S' = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,1,-1,-1)\}$ lin indep ✓

$\boxed{S' = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,1,-1,-1), (1,1,1,-1)\}}$ lin. indep ✓

Además, como en este caso rang $A = $ rang A^*, S' es un sist de generadores $\Rightarrow$ S' es base de $\mathbb{R}^4$

– Algoritmo para extraer una base de un conj. generador finito –

1º Poner todos los vectores de S por columnas de una matriz.

2º Hacer Gauss.

3º Los elem's linealmente independientes son los correspondientes a las columnas de la matriz original en las que hay un "escalón".

EL LEMA DE INTERCAMBIO DE STEINITZ

Idea En $\mathbb{R}^4$ consideramos los conjuntos:

$S = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), \cancel{(0,1,-1,0)}, (1,1,-1,-1),$

$H \subseteq S$ $(1,1,1,-1), \cancel{(1,-1,1,-1)}\}$ ← 6 vectores

Sustituidos

que es un sist. de generadores; y 2 vectores

$\boxed{L = \{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\}}$ que es lin. indep.

Lo que nos va a decir el Lema de Intercambio de Steinitz es que podemos sustituir 2 elementos de S por los 2 de L de modo que siga siendo un conj. de generadores.

De hecho, eligiendo...

$H = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,1,-1,1), (1,1,1,-1)\}$

se tiene que $H \cup L$ es sist. de generadores de $\mathbb{R}^4$

Obs: La importancia del Lema de Intercambio de Steinitz radica en dos puntos: (1) poder crear unas bases a partir de otras, si S es base; (y 2) establecer que todas las bases de un K-e.v. finit. generado tienen el mismo nº de elem's (será un Corolario)

Teorema (Lema de intercambio de Steinitz)

Sea V un K-e.v y sean:

- $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un conjunto de generadores de V
- $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente

Entonces:

(i) $n \leq m$ Un conj. lin. indep tiene menos vectores o, como mucho, el mismo nº que un conj. de generadores.

(ii) Existe $H \subseteq S$ tal que $\underbrace{H}_{m-n} \cup \underbrace{L}_{n}$ es un conj. de generadores de V, de modo que H tiene exactamente $m-n$ vectores.

En $H \cup L$ hay m vectores (como en S), pero solo los de H son de S:

Podemos cambiar n vectores de S por los n de L y que el conj. resultante siga siendo generador.

DEM: Inducción sobre n (nº de elem's de L)

- Caso base: $(n=0)$ $L=\emptyset$. En este caso, basta tomar $H = S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ que tiene $m-0=m$ elementos.

  (i) $0 \leq m$ ✓

  (ii) $H \cup L = H = S$, que es un sist. de generadores ✓

- Caso general:

  - Hipótesis: Supongamos que si L tiene n elementos, $n \leq m$ y existe $H \subseteq S$ con $m-n$ elem's tal que $H \cup L$ es generador.

  - Tesis. Sea $L = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ un conj. lin. indep; en particular $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es lin. indep, por lo que podemos usar la hipótesis: $n \leq m$ y existe $H \subseteq S$ con $m-n$ vectores, a saber,

$$H = \{u_1, \ldots, u_{m-n}\}$$

tal que $\{u_1, \ldots, u_{m-n}, v_1, \ldots, v_n\}$ es generador.

En particular, podemos escribir

$$v_{n+1} \overset{\circledast}{=} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{m-n} u_{m-n} + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n}, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, no todos nulos (porque $v_{n+1} \neq 0$). De hecho, algún $\lambda_i \neq 0$, pues si todos lo fueran, tendríamos:

$v_{n+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \Rightarrow L = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ no sería lin indep!

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_1 \neq 0$.

En $\circledast$, dividiendo por λ_1,

$$\frac{1}{\lambda_1} v_{n+1} = u_1 + \ldots + \frac{\lambda_{m-n}}{\lambda_1} u_{m-n} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} v_1 + \ldots + \frac{\mu_n}{\lambda_1} v_n.$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \ldots + \frac{-\lambda_{m-n}}{\lambda_1} u_{m-n} + \frac{-\mu_1}{\lambda_1} v_1 + \ldots + \frac{-\mu_n}{\lambda_1} v_n + \frac{1}{\lambda_1} v_{n+1}$$

u_1 es comb. lin de $\{u_2, \ldots, u_{m-n}, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$

Llamamos $H' = \{u_2, \ldots, u_{m-n}\}$. Vamos a ver que $H' \cup L$ es un sist. de generadores. Como $\{u_1, \ldots, u_{m-n}, v_1, \ldots, v_n\}$ lo era, dado $w \in V$,

$$w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{m-n} u_{m-n} + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

¡Es arbitrario!

$$= \alpha_1 \cdot (\text{comb. lin de } u_2, \ldots, u_{m-n}, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) + \ldots + \alpha_{m-n} u_{m-n} + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

w es comb. lin de $H' \cup L$ ✓

¿No falta ver que $n+1 \leq m$? Está implícito... aquí:

$$v_{n+1} = \cancel{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{m-n} u_{m-n}} + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

Necesariamente $m-n > 0$, porque si no, no habría λ's y $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ sería lin. dep.

$\Rightarrow \quad m-n>0 \quad \Rightarrow \quad m>n \quad \underset{m,n\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} \quad m \geq n+1$ ✓

<u>Corolario</u> (Cardinalidad de las bases) Sea V un K-e.v. finitamente generado. Entonces cualquier base de V tiene el mismo número de elementos.

<u>DEM:</u> Sean B y B' dos bases de V con

$$|B| = m \quad y \quad |B'| = n.$$

Utilizando el Lema de Intercambio de Steinitz:

- Como B es generador y B' es lin. indep $\Rightarrow n \leq m$
- Como B' es generador y B es lin. indep $\Rightarrow m \leq n$

$\Rightarrow \quad m = n$ ✓

<u>Def</u> (Dimensión) Sea V un K.e.v. Decimos que V es de dimensión finita si tiene una base con un nº finito de vectores, a saber, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. En este caso, decimos que n (el nº de elem's de cualquiera de sus bases) es la dimensión de V como K-e.v,

$$\dim_K V = n$$

Un espacio vectorial que no es de dim. finita, se dice de dimensión infinita

---

<u>Obs</u>: La dimensión de un K-e.v depende del cuerpo K en que tomemos los escalares.

Ej Calcular la dimensión de:

- $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Como $B_0=\{e_1,\ldots,e_n\}$ es la base canónica,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$$

Si no hay lugar a confusión, se puede omitir.

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Matriz todo 0's salvo un 1 en la fila i, col. j.

$B_0=\{E_{ij}: 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n\}$ es la base canónica

$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = m\cdot n.$

- $\mathbb{R}_n[x]$ como $\mathbb{R}$-e.v.

$B_0=\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es base canónica

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1.$

- $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-e.v.

Cualquier $z\in\mathbb{C}$ se puede escribir como

$$z = 1\cdot z$$

por lo que $B=\{1\}$ es una base $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

- $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-e.v.

Cualquier $z\in\mathbb{C}$ se puede escribir como

$$z = \lambda_1\cdot 1 + \lambda_2 \cdot i \quad \text{para } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$z = a + bi$ Parte real, Parte imaginaria

por lo que $B=\{1, i\}$ es una base $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

¡La dim. depende del cuerpo K!

DIMENSIÓN, INDEPENDENCIA Y GENERADORES.

En un K-e.v., V, con $\dim V = n$,

- ¿Cuántos vectores debe tener un subconj $S \subseteq V$, como mínimo, para ser un sist. de generadores?
- ¿Cuántos vectores debe tener un subconj $L \subseteq V$, como máximo, para ser lin. indep?

Sabemos, por el Lema de Intercambio de Steinitz, que un sist. de generadores tiene más vectores que un conj. lin. indep, o al menos, el mismo número.

Proposición Sea V un K-e.v. con $\dim V = n$.

(i) Si $S \subseteq V$ es un sist. de generadores, $|S| \geq n$ y, de hecho,

$$S \text{ es base} \iff |S| = n$$

(ii) Si $L \subseteq V$ es lin. indep, $|L| \leq n$ y, de hecho,

$$L \text{ es base} \iff |L| = n.$$

DEM Como $\dim V = n$, sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V.

(i) Llamando $m = |S|$, como S es generador y B es lin. indep, el Lema de Steinitz nos dice que

$$m \geq n \implies |S| \geq n \checkmark$$

Demostremos la equivalencia S base $\iff |S| = n$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si S es base, como $\dim V = n$ y todas las bases tienen el mismo nº de vectores, $|S| = n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sup. que $S \subseteq V$ es un conj. generador con $|S| = n$

$$S = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Hay que ver que S es lin. indep. Supongamos que no.
Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Uno de los vectores de S se puede escribir como comb. lin. del resto.

Pero como S es generador, para cualquier $v \in V$,

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$= (\mu_1\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\mu_1 \lambda_n + \mu_n) v_n$$

$\Rightarrow$ $S' = \{v_2, \ldots, v_n\}$ es un sist. de generadores de V que tiene $n-1$ vectores, pero... esto es una contradicción con lo que hemos dem. antes. Por tanto, S no puede ser lin. dep y S es base de V ✓

(ii) Sea $L \subseteq V$ un conj. lin. independiente con $|L| = p$.
Por el Lema de Steinitz, como $\mathcal{B}$ es base (sist. de gen) con $|\mathcal{B}| = n$, $|L| \leq n$ ✓

Demostremos ahora la equiv L base $\Leftrightarrow |L| = n$

$\boxed{\Rightarrow}$ Como en (i) ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea L un conj. lin. indep con $|L| = n$. Usando de nuevo el Lema de Steinitz, su segunda parte nos dice que L es generador $\Rightarrow$ L es base ✓ ▤

Conclusión: En un espacio vectorial de dimensión n,

- Un conj. de generadores de n elem's es base.
- Un conj. linealmente indep. de n elem's es base.

BASES DE LAGRANGE

Dados $n+1$ números reales distintos $x_0, x_1, \_\_, x_n$, definimos los siguientes $n+1$ polinomios, llamados polinomios de Lagrange:

$$p_i(x) = \frac{\overbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}^{n \text{ factores lineales con raíces } x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}}{\underbrace{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}_{n \text{ factores numéricos}}} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}.$$

Ej Dados $x_0=-2;\ x_1=-1;\ x_2=1;\ x_3=3;$ definir los polinomios de Lagrange asociados.

$$p_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-2+1)(-2-1)(-2-3)} = -\frac{1}{5}\left(x^3-3x^2-x+3\right)$$

$$p_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(-1+2)(-1-1)(-1-3)} = \frac{3}{4}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)$$

$$p_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-3)}{(1+2)(1+1)(1-3)} = -\frac{1}{12}\left(x^3-7x-6\right)$$

$$p_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(3+2)(3+1)(3-1)} = \frac{1}{20}\left(x^3+2x^2-x-2\right)$$

Los polinomios de Lagrange tienen una propiedad muy buena:

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

- Si sustituimos $x=x_j$, para $j\neq i \Rightarrow p_i(x_j)=0$
- Si sustituimos $x=x_i \Rightarrow p_i(x_i)=1$.

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

Además, el grado de cada $p_i(x)$ es n, porque tiene n factores $(x - x_j)$ distintos.

Proposición El conjunto

$$\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$$

es una base del $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}_n[x]$.

DEM Sabemos que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ y $|\mathcal{B}| = n+1$.

Basta demostrar entonces que los $p_i(x)$ son lin. indep.

Consideramos

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_n p_n(x) = 0$$

Sustituyendo en $x = x_0$:

$$\lambda_0 \underbrace{\boxed{p_0(x_0)}}_{1} + \lambda_1 \underbrace{\boxed{p_1(x_0)}}_{0} + \ldots + \lambda_n \underbrace{\boxed{p_n(x_0)}}_{0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

Sustituyendo en $x = x_1$

$$\lambda_0 \cancelto{0}{p_0(x_1)} + \lambda_1 \cancelto{1}{p_1(x_1)} + \ldots + \lambda_n \cancelto{0}{p_n(x_1)} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

De hecho, para $x = x_i$, tenemos $\lambda_i = 0$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ es lin. indep.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} \text{ es base de } \mathbb{R}_n[x].$$

Sea $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ un polinomio de grado n, con

$$p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$$

¿Cuáles son las coordenadas de $p(x)$ en la base de Lagrange $\mathcal{B} = \{p_0(x), \ldots, p_n(x)\}$?

$$p(x) = \lambda_1 p_0(x) + \dots + \lambda_n p_n(x).$$

Si sustituimos en $x = x_i$,

$$p(x_i) = \lambda_1 \cancelto{0}{p_0(x_i)} + \dots + \lambda_i \cancelto{1}{p_i(x_i)} + \dots + \lambda_n \cancelto{0}{p_n(x_i)}$$

$$\Rightarrow p(x_i) = \lambda_i \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n.$$

Esto nos da las coordenadas de $p(x)$:

$$\boxed{p(x) = \overbrace{p(x_0)}^{y_0} \cdot p_0(x) + \overbrace{p(x_1)}^{y_1} p_1(x) + \dots + \overbrace{p(x_n)}^{y_n} p_n(x)}$$

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE.

$p(x)$ es el único polinomio de grado n (ya que $\mathcal{B}$ es una base) que pasa por los puntos

$$(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2.$$

Ej: Hallar el único polinomio de grado 3 que pasa por los puntos $(\underset{x_0}{-2}, \underset{y_0}{3}), (\underset{x_1}{-1}, \underset{y_1}{6}), (\underset{x_2}{1}, \underset{y_2}{0}), (\underset{x_3}{3}, \underset{y_3}{-2})$.

Ya tenemos los polinomios de Lagrange asociados a x_0, x_1, x_2 y x_3:

$$p_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-2+1)(-2-1)(-2-3)} = -\frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - x + 3)$$

$$p_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(-1+2)(-1-1)(-1-3)} = \frac{3}{4}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

$$p_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-3)}{(1+2)(1+1)(1-3)} = -\frac{1}{12}(x^3 - 7x - 6)$$

$$p_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(3+2)(3+1)(3-1)} = \frac{1}{20}(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

Por lo que acabamos de ver, el polinomio que buscamos es

$$p(x) = 3p_0(x) + 6p_1(x) + 0\,p_2(x) + (-2)p_3(x)$$

$$= \frac{31}{60}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - \frac{181}{60}x + \frac{43}{10}.$$

Corolario Sea $p(x) \in \overset{K}{\mathbb{R}}_n[x]$ con $p(x_i) = 0$ para $n+1$ valores distintos $x_0, x_1, \dots, x_n \in \overset{K}{\mathbb{R}}$. Entonces $p(x) = 0$.

DEM Sabemos que $\mathcal{B} = \{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ es una base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[x]$ asociada a $x_0, \dots, x_n$. En este base, la única forma de escribir $p(x)$ es

$$p(x) = \underset{0 = p(x_0)}{y_0}\, p_0(x) + \underset{0 = p(x_1)}{y_1}\, p_1(x) + \dots + \underset{0 = p(x_n)}{y_n}\, p_n(x) = 0 /\!/$$

$\blacksquare$

Este corolario nos dice que un polinomio de grado n con coeficientes reales en un cuerpo K. no puede tener más de n raíces distintas a no ser que sea $0 /\!/$.