# Espacios vectoriales

1. Sea $V$ un $k$-ev. Demostrar las siguientes propiedades:

   *a*) El vector nulo, $0 \in V$, es único.

   *b*) Dado cualquier vector $v \in V$, su opuesto es único y lo escribimos como $-v$.

   *c*) Si $0_k \in k$ es el neutro para la suma en el cuerpo $k$, entonces $0_k \cdot v = 0$ para todo $v \in V$.

   *d*) Si denotamos por $1_k$ al neutro para el producto en el cuerpo $k$, entonces $(-1_k) \cdot v = -v$ para todo $v \in V$.

2. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:

   *a*) El conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que un $n \in \mathbb{N}$ fijo,
   $$\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{R}\},$$
   con las operaciones habituales de suma y producto de un polinomio por un número, como $\mathbb{R}$-e.v.

   *b*) $\mathbb{R}$ con la suma y el producto habituales, como $\mathbb{Q}$-e.v.

   *c*) El conjunto de matrices invertibles de orden $n$ y entradas reales,
   $$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det M \neq 0\},$$
   con las operaciones habituales de suma y producto de un número por una matriz, como $\mathbb{R}$-e.v. A este conjunto se le llama **grupo general lineal de orden $n$.**

   *d*) El conjunto de todas las funciones reales de variable real continuas,
   $$\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}.$$
   con la suma y el producto de funciones por un número habituales, como $\mathbb{R}$-e.v.

3. Demostrar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados, suponiendo que trabajamos en un $k$-e.v. $V$:

   *a*) Sea $S$ un subconjunto finito de $V$ linealmente dependiente. Entonces, cualquier vector de $S$ se puede escribir como combinación lineal del resto.

   *b*) Cualquier subconjunto de $V$ que contenga al vector cero es linealmente dependiente.

   *c*) Si $S$ es un subconjunto linealmente dependiente, cualquier subconjunto de $S$ también es linealmente dependiente.

   *d*) Si $S$ es un subconjunto linealmente independiente, cualquier subconjunto de $S$ también es linealmente independiente.

4. Consideramos en $\mathbb{R}^4$ el subconjunto
   $$S = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$$

   *a*) Demostrar que $S$ es un conjunto linealmente independiente.

   *b*) Escribir el vector $v = (1,1,0,-1)$ como combinación lineal de los vectores del siguiente subconjunto $S$.

5. En $\mathbb{R}[x]$ consideramos el conjunto
   $$S = \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x, 1\}.$$
   Demostrar que $S$ es un conjunto linealmente independiente.

6. En $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamamos $E_{ij}$ a la matriz que tiene todos los elementos nulos, salvo el de la fila $i$ y la columna $j$, que es un 1. Demostrar que el conjunto

$$S = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

es linealmente independiente.

7. Sea $V$ un $k$-e.v. y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Demostrar que

   *a*) $S_1$ linealmente dependiente $\Rightarrow S_2$ linealmente dependiente.

   *b*) $S_2$ linealmente independiente $\Rightarrow S_1$ linealmente independiente.