CARDINALIDAD

CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Def (Conj. equipotentes) Sean X, Y dos conjuntos. Decimos que son equipotentes si existe $f: X \to Y$ biyectiva.

Notación: X, Y equipotentes $\rightsquigarrow$ $X \sim Y$.

Prop La siguiente relación es de equivalencia: para X, Y conjuntos,

$$X \mathcal{R} Y \overset{df}{\Longleftrightarrow} X \sim Y.$$

DEM

(i) Reflexiva: $X \sim X$ porque $id_X : X \to X$ es biyectiva.

(ii) Simétrica: $X \sim Y \Rightarrow f: X \to Y$ biy $\Rightarrow f$ invertible
$\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ biy $\Rightarrow Y \sim X$

(iii) Transitiva: $\left.\begin{array}{l} X \sim Y \Rightarrow f: X \to Y \text{ biy} \\ Y \sim Z \Rightarrow g: Y \to Z \text{ biy} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f: X \to Z$ biy
$\Rightarrow X \sim Z$

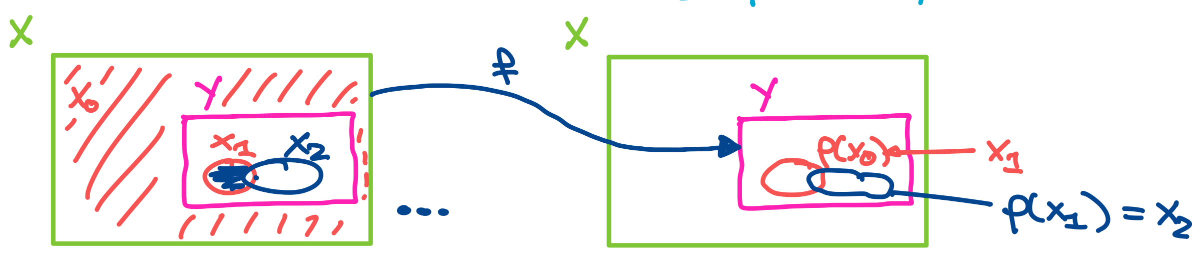
■

Lema 1. Sean X, Y conjuntos con $Y \subseteq X$ y sea $f: X \to Y$ una función inyectiva. Entonces existe

$$F: X \to Y \text{ biyectiva} \qquad (X \sim Y)$$

DEM. Definimos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = X - Y \qquad X_{n+1} = f(X_n) \text{ para } n \geq 1.$$



Consideramos la unión de los conjuntos anteriores:

$$X_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

Definimos $F: X \to Y$ como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X_\infty \\ x, & \text{si } x \notin X_\infty \end{cases}$$

Hay que comprobar que esta F es la que buscamos.

- F está bien definida. ← $F(x) \in Y$ para todo $x \in X$
  - → Si $x \in X_\infty$, $F(x) = f(x) \in Y$ porque $f: X \to Y$.
  - → Si $x \notin X_\infty$, $F(x) = x \in Y$ por ⊛
- F inyectiva. Dados $x, x' \in X$ con $F(x) = F(x')$, f iny.
  - → Si $x, x' \in X_\infty$, $F(x) = F(x') \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$!
  - → Si $x, x' \notin X_\infty$, $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$!
  - → Si $x \in X_\infty$, $x' \notin X_\infty$ ¡CONTRAD! Este caso no se puede dar

    $F(x) = F(x') \Rightarrow f(x) = x'$

    Como $x \in X_\infty$, $x \in X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$

    $\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{x'} \underbrace{\in}_{\in} f(X_n) = \underbrace{X_{n+1}}_{X_{n+1}}$

    $x' \in X_{n+1} \Rightarrow x' \in X_\infty$
- F sobreyectiva. Tomamos $y \in Y \subseteq X$
  - → Si $y \notin X_\infty$, $F(y) = y$
  - → Si $y \in X_\infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $y \in X_n = f(X_{n-1})$

    $\Rightarrow \exists x \in X_{n-1}$ con $F(x) = f(x) = y$

    Por definición de F ($x \in X_\infty$) ∎

TEOREMA DE CANTOR-SCHRÖDER-BERSTEIN

Establece un criterio para saber si dos conjuntos son equipotentes.

Teorema (C-S-B) Sean X, Y dos conjuntos y sean

$$f: X \longrightarrow Y \qquad y \qquad g: Y \longrightarrow X$$

ambas inyectivas. Entonces X e Y son equipotentes. Existe $h: X \to Y$ biyect.

DEM:

Consideramos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

$$g \circ f: X \longrightarrow g(Y) \subseteq X$$

es inyectiva por ser composición de inyectivas.

$\overset{\text{Lema 1}}{\Longrightarrow}$ Existe $\tilde{h}: X \longrightarrow g(Y)$ biyectiva.

Como $g: Y \longrightarrow g(Y)$ es biyectiva (por ser g iny. y ser la imagen $g(Y)$, es sobreyectiva) existe la inversa

$$g^{-1}: g(Y) \longrightarrow Y \quad \text{también biyectiva.}$$

Componiendo ahora $\tilde{h}$ y g^{-1}, ambas biyectivas, obtenemos

$$h = g^{-1} \circ \tilde{h}: X \longrightarrow Y \quad \text{biyectiva.} \quad \blacksquare$$

El Teorema C-S-B nos dice que para asegurar que existe una biyección entre X e Y basta con encontrar dos funciones inyectivas

$$f: X \longrightarrow Y \qquad y \qquad g: Y \longrightarrow X.$$

Ejemplo Sean A, B, C tres conjuntos no vacíos con $A \subseteq B \subseteq C$, y A equipotente a C. Demostrar que los tres son equipotentes entre sí.

$\boxed{B \sim C}$ Por el Teorema C-S-B basta demostrar que existen funciones inyectivas $B \to C$ y $C \to B$.

Como $B \subseteq C$, consideramos la función inclusión

$$\begin{aligned} i : B &\hookrightarrow C \\ b &\longmapsto b \end{aligned}$$ ✓

que es claramente inyectiva: $i(b) = i(b') \Rightarrow b = b'$.

Ahora, como $A \sim C$, existe $f : A \to C$ biyectiva y, de hecho, tiene inversa $f^{-1} : C \to A$ biyectiva.

Como $A \subseteq B$, la función $i' : A \hookrightarrow B$ es inyectiva.

Componiendo

$$\underbrace{i'}_{\text{iny}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{iny}} : C \to B$$ ✓ es inyectiva.

$\overset{\text{C-S-B}}{\Longrightarrow}$ $C \sim B$.

Además como '$\sim$' es de equivalencia y $A \sim C$, $C \sim B$ por la transitiva, $A \sim B$ ∎

<u>Obs</u>: El ejemplo anterior es una especie de "teorema del sándwich":

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \subseteq C \\ A \sim C \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B \sim C.$$

<u>Corolario</u> Sean X, Y conjuntos. Si existen dos funciones

$$f : X \to Y \quad \text{y} \quad g : Y \to X$$

ambas sobreyectivas, entonces $X \sim Y$.

Proposición Sean X, X', Y e Y' conjuntos con $\underset{\sim}{X \sim Y}$ y $\underset{\sim}{X' \sim Y'}$.

Entonces:

(i) $X \times X' \sim Y \times Y'$

(ii) Si $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow X \cup Y \sim X \times \{0,1\}$

(iii) Si $X \cap X' = \emptyset = Y \cap Y' \Rightarrow X \cup X' \sim Y \cup Y'$.

DEM:

$X \sim Y \Rightarrow f: X \to Y$ biy; $X' \sim Y' \Rightarrow f': X' \to Y'$ biy.

$\boxed{(i)}$ Buscamos una biyección entre $X \times X'$ e $Y \times Y'$, pero la podemos construir fácilmente a partir de f y f':

$$F: X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$$
$$(x, x') \longmapsto (f(x), f'(x'))$$

- F está <u>bien definida</u>, porque

$$(x, x') \in X \times X' \Longrightarrow (\underbrace{f(x)}_{Y}, \underbrace{f'(x')}_{Y'}) \in Y \times Y' \checkmark$$

- F es <u>inyectiva</u>

Tomamos $(x_1, x_1'), (x_2, x_2') \in X \times X'$ con

$$F(x_1, x_1') = F(x_2, x_2') \Rightarrow (f(x_1), f'(x_1')) = (f(x_2), f'(x_2'))$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightsquigarrow f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f \text{ biy}} x_1 = x_2 \\ \rightsquigarrow f'(x_1') = f'(x_2') \xrightarrow{f' \text{ biy}} x_1' = x_2' \end{array}\right\} \longrightarrow (x_1, x_1') = (x_2, x_2') \checkmark$$

- F es <u>sobre</u>

Tomamos $(y, y') \in Y \times Y'$

$\rightsquigarrow y \in Y$, $f: X \to Y$ sobre $\Rightarrow \exists x \in X$ con $f(x) = y$

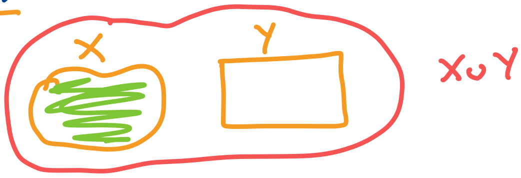
$\rightsquigarrow y' \in Y'$, $f': X' \to Y'$ sobre $\Rightarrow \exists x' \in X'$ con $f'(x') = y'$

$$\Rightarrow (y, y') = (f(x), f'(x')) \overset{\text{Def. de } F}{=} F(x, x') \text{ con } (x, x') \in X \times X' \checkmark$$

$\Rightarrow X \times X' \sim Y \times Y'$ ✓✓

$\boxed{(ii)}$ $\underbrace{X \cap Y = \emptyset}_{\uparrow} \Rightarrow X \cup Y \sim X \times \{0,1\}.$

Están "separados"



Buscamos una función biyectiva entre $X \cup Y$ y $X \times \{0,1\}$

Recordemos que $f: X \to Y$ es una biyección por hipótesis.

$$\begin{aligned} G: X \times \{0,1\} &\longrightarrow X \cup Y \\ (x,0) &\longmapsto x \\ (x,1) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Con esto 'cubrimos' X

En Y

- G está <u>bien definida</u> porque

$G(x,0) = x \in X \subseteq X \cup Y$

$G(x,1) = f(x) \in Y \subseteq X \cup Y$ ✓

- G es <u>inyectiva</u>

  * Sean $(x,0), (x',0) \in X \times \{0,1\}$ con $G(x,0) = G(x',0)$

  $\Rightarrow x = x' \Rightarrow (x,0) = (x',0)$ ✓

  * Sean $(x,1), (x',1) \in X \times \{0,1\}$ con $G(x,1) = G(x',1)$

  $\Rightarrow f(x) = f(x') \underset{f \text{ iny}}{\Rightarrow} x = x' \Rightarrow (x,1) = (x',1)$ ✓

  * Si tomamos $(x,0), (x',1) \in X \times \{0,1\}$ no puede darse que $\underbrace{G(x,0)}_{\in X} = \underbrace{G(x',1)}_{\in Y}$ porque $X \cap Y = \emptyset$ por hip. ✓

- G es <u>sobre</u>

Tomamos $t \in X \cup Y$. Como $X \cap Y = \emptyset$, o bien $t \in X$, o bien $t \in Y$.

* Si $t \in X \Rightarrow t = G(t,0)$ ✓

* Si $t \in Y \overset{f \text{ sobre}}{\Rightarrow} \exists x \in X$ con $f(x) = t$ ✓

$$\Rightarrow \quad t = f(x) = G(x,1) \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad X \cup Y \sim X \times \{0,1\}.$$

$\boxed{(iii)}$ Si $\underbrace{X \cap X' = \overbrace{\emptyset = Y \cap Y'}}$ $\Rightarrow$ $X \cup X' \sim Y \cup Y'$

↳ X y X' no comparten elem's,

Y e Y' no comparten elem's.

Buscamos una biyección entre $X \cup X'$ e $Y \cup Y'$, sabiendo que $X \sim Y$ y $X' \sim Y'$

$$H: X \cup X' \longrightarrow Y \cup Y'$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ f'(x) & \text{si } x \in X' \end{cases}$$

- H está <u>bien definida</u> porque $f(x) \in Y$ o $f'(x) \in Y'$ y, en cualquier caso, $H(x) \in Y \cup Y'$ ✓

- H es <u>inyectiva</u> ✓. Tomamos $x_1, x_2 \in X \cup X'$, con $H(x_1) = H(x_2)$.

  * Si $x_1, x_2 \in X$:

  $$H(x_1) = H(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ iny}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \checkmark$$

  * Si $x_1, x_2 \in X'$:

  $$H(x_1) = H(x_2) \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) \overset{f' \text{ iny}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \checkmark$$

  * Si $x_1 \in X$ y $x_2 \in X'$, es imposible que tengamos

  $$\begin{array}{ccc} H(x_1) & = & H(x_2) \\ \parallel & & \parallel \\ f(x_1) & & f'(x_2) \\ \cap\!\!\!| & & \cap\!\!\!| \\ Y & & Y' \end{array}$$

  Este caso no se puede dar//

  Pero $Y \cap Y' = \emptyset$

  * Si $x_1 \in X'$ y $x_2 \in X$, tampoco se puede dar que $H(x_1) = H(x_2)$.

- H es <u>sobre</u>. ✓ Tomamos $y \in Y \cup Y'$. Como $Y \cap Y' = \emptyset$, o bien $y \in Y$, o bien $y \in Y'$.

- Si $y \in Y$, como $f: X \to Y$ biy $\Rightarrow \exists x \in X$ con $f(x) = y$

  $\Rightarrow \quad y = f(x) = H(x)$ ✓

- Si $y \in Y'$, como $f': X' \longrightarrow Y'$ biy $\Rightarrow \exists x' \in X'$ con $f'(x') = y$

  $\Rightarrow \quad y = f'(x') = H(x')$ ✓

$$\Rightarrow \quad X \cup X' \sim Y \cup Y' \qquad \blacksquare$$

CONJUNTOS FINITOS

Def (Conjunto I_n) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definimos

$$I_n = \{ k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n \}$$

$\quad \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Def (conj. finito y cardinal finito) Sea A un conjunto. Diremos que A es finito si $A = \emptyset$ o $A \sim I_n$ para algún n. En el primer caso, el cardinal de A es 0, y en el segundo, es n. Escribimos

Cardinal de A $\rightarrow |A| = 0 \quad$ o $\quad |A| = n$

Obs 1. A veces se escribe $\mathrm{card}(A)$ o $\# A$.

Obs 2. Nuestra misión ahora es probar que si A es un conj. finito no puede ser equipotente a I_n e I_m para $n \neq m$. La intuición nos dice que debe ser así, pero hay que probarlo formalmente.

Lema Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; sea A un conjunto, $A \neq \emptyset$; y sea $a_0 \in A$. Se tiene que

$$A \sim I_{n+1} \iff A - \{a_0\} \sim I_n$$

"A tiene $n+1$ elem's si, y solo si, al quitarle un elemento, se queda con n".

DEM:

$\boxed{\Leftarrow}$ Sup. que $A - \{a_0\} \sim I_n$, esto es, existe

$$g : A - \{a_0\} \longrightarrow I_n \quad \text{biyectiva.}$$

Definamos $f : A \longrightarrow I_{n+1}$ como:

Ahora aquí está a_0, que en g no estaba

$$f(a) = \begin{cases} g(a), & a \neq a_0 \\ n+1, & a = a_0 \end{cases}$$

¿ $A \sim I_{n+1}$?
$\Updownarrow$
¿ f biyectiva?

- $\underline{f \text{ inyectiva}}$ Sean $a, a' \in A$ con $f(a) = f(a')$.
  - * Si $a, a' \in A - \{a_0\}$
    $$f(a) = f(a') \Rightarrow g(a) = g(a') \overset{g \text{ iny.}}{\Longrightarrow} a = a' \checkmark$$
  - * Si $a \in A - \{a_0\}$ y $a' = a_0$
    $$f(a) = f(a') \Rightarrow g(a) = n+1$$
    No tiene sentido porque $n+1 \notin I_n$

    ESTE CASO NO SE DA.
  - * Si $a = a_0$ y $a' \in A - \{a_0\}$, tampoco se da.
  - * Si $a = a_0$ y $a' = a_0 \Rightarrow a = a' \checkmark$
- f es $\underline{\text{sobreyectiva}}$. Sea $y \in I_{n+1}$
  - * Si $y = n+1 \Rightarrow f(a_0) = n+1 = y \checkmark$
  - * Si $y \neq n+1$, $y \in I_n$. Usando $g : A - \{a_0\} \to I_n$ biy, existe $a \in A - \{a_0\} \subseteq A$ con $g(a) = y$. Pero por def. de f,
    $$f(a) = g(a) = y \checkmark$$

Esto prueba $\boxed{\Leftarrow}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sup. que $A \sim I_{n+1}$, esto es, existe

$$f : A \longrightarrow I_{n+1} \quad \text{biyectiva.}$$

- <u>Caso 1</u>. Si $f(a_0) = n+1$. Basta definir

Aquí falta a_0 $\quad h: A - \{a_0\} \longrightarrow I_n$ $\leftarrow$ Aquí falta $n+1$

$$a \longmapsto f(a)$$

h es una biyección porque en realidad es f pero restringida a $A-\{a_0\}$. ✓

Basta intercambiar estos valores

- <u>Caso 2</u>. Si $f(a_0) \neq n+1$.

Existirá entonces $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$, con $f(a_1) = n+1$.

Definimos $\tilde{f}: A \longrightarrow I_{n+1}$

Idea: Redefinir f a $\tilde{f}$ para que $\tilde{f}(a_0) = n+1$ y estar en el <u>caso 1</u>.

$$a \longmapsto \begin{cases} f(a), & a \neq a_0,\ a \neq a_1 \\ n+1, & a = a_0 \\ f(a_0), & a = a_1 \end{cases}$$

La función $\tilde{f}: A \to I_{n+1}$ es biyectiva con $\tilde{f}(a_0) = n+1$ y, por el <u>Caso 1</u> aplicado a ella existe

$$h: A - \{a_0\} \longrightarrow I_n \text{ biy } ✓$$

Conclusión: $A - \{a_0\} \sim I_n$.

Esto prueba $\boxed{\Rightarrow}$ ∎

<u>Teorema</u> (Subconj. de conj. finitos) Sea A un conjunto, $A \sim I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y sea $B \subsetneq A$ un subconjunto propio. Entonces $B \nsim I_n$, pero existe $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ con $B \sim I_m$.

"Cualquier subconjunto propio de un conjunto finito, es finito"

Si un conjunto tiene un subconjunto propio infinito, el conjunto es infinito.

DEM: Si $B=\emptyset$, $B\not\sim I_n$ porque I_n no es vacío.

Sup. que

$$C=\{n\in\mathbb{N}: \text{el teorema es cierto para } A\sim I_n\}$$

Si vemos que $C=\mathbb{N}$, es que el teorema es cierto siempre. Usamos inducción.

- <u>Caso base</u> $(n=1)$

  Sea $A=\{a\}\sim I_1$. El único subconj. propio de A es $B=\emptyset$ y $B\not\sim I_n$, por lo que el teorema es cierto ✓

- <u>Caso general</u> Sup. que el teorema es cierto para n.

  Sea A un conj. con $A\sim I_{n+1}$, esto es, existe

$$f: A \longrightarrow I_{n+1} \text{ biyectiva.}$$

Existe porque B es subconj propio ↓

Sea $B\subsetneq A$ con $B\neq\emptyset$. Elegimos $b_0\in B$ y $a_0\in A-B$

Aplicando el Lema anterior, existe una biyección

$$g: A-\{b_0\} \longrightarrow I_n$$

Por otro lado, $\underbrace{B-\{b_0\}}_{a_0\notin} \subsetneq \underbrace{A-\{b_0\}}_{a_0\in}$

- $A-\{b_0\}\sim I_n$; $B-\{b_0\}$ es un subconj. propio de $A-\{b_0\}$

$\overset{HIP}{\Rightarrow}$ <u>No existe ninguna biyección $B\to I_n$.</u> ⊛

⊛⊛ $\boxed{\text{Además, o bien } B-\{b_0\}=\emptyset \text{, o bien existe una biy } g: B-\{b_0\}\longrightarrow I_m, \text{ para } m<n.}$

El Lema anterior y ⊛ $\Rightarrow B\not\sim I_{n+1}$

Esto solo es la 1ª mitad del teorema, falta la 2ª:

- Si $B-\{b_0\}=\emptyset \Rightarrow B\sim I_1$
- Si $B-\{b_0\}\neq\emptyset$, por el Lema anterior y ⊛⊛

$\Rightarrow B \sim I_{m+1}$ y como $m < n$, $m+1 \leq n$.

En cualquier caso, $B \sim I_m$ para $m < n+1$. ▤

<u>Corolario</u> Si A es un conjunto finito no vacío y $B \subsetneq A$ es un subconj. propio, entonces $A \nsim B$.

<u>DEM</u>: Sup. que $A \sim B$. ← No puede ser.

Como A finito, $A \sim I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y como $A \sim B$, por la transitiva tendríamos $B \sim I_n$ y esto <u>contradice</u> el teorema anterior por ser B un subconj. propio de A. ▤

<u>Corolario 2</u> El cardinal de un conjunto finito está unívocamente determinado por el conjunto.

<u>DEM</u>: Sea A un conj. finito y sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Esto nos dice que $I_m \subsetneq I_n$. Sup. que

$A \sim I_m$ y $A \sim I_n$ ¡CONTRADICCIÓN!

Por la transitiva, $I_m \sim I_n$, hay una biyección entre un conjunto finito (I_n) y un subconj. propio (I_m) y esto es imposible. ▤

El corolario anterior nos dice que si A es un conj. finito, $A \sim I_n$, este n es único y diremos que el cardinal de A es n (A tiene n elem's).

<u>Corolario 3</u>. (Caracterización de conj. finitos).

Sea A un conjunto. Son equivalentes:

(i) A es finito.

(ii) Existe una función sobreyectiva $f: I_n \to A$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Existe una función inyectiva $g: A \to I_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

DEM: Sea $A \neq \emptyset$, pues si $A = \emptyset$ el resultado es trivial.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Como A finito, $A \sim I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, esto es $f: I_n \to A$ biyectiva $\Rightarrow$ f sobre ✓

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Sea $f: I_n \to A$ sobreyectiva. Esto significa que dado $a \in A$, $\underbrace{f^{-1}(\{a\})}_{\text{Conj. de preimágenes de } \{a\} \text{ en } I_n} \neq \emptyset$

Definimos:

$$\begin{aligned} g: A &\longrightarrow I_n \\ a &\longmapsto \min f^{-1}(\{a\}) \end{aligned}$$

~~Podría tener varios valores en $\{1, \dots, n\}$!!~~

- g inyectiva:

Sean $a, a' \in A$. Si $a \neq a' \Rightarrow f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{a'\}) = \emptyset$, por lo que el mínimo de cada uno es distinto,

$g(a) \neq g(a') \Rightarrow g$ iny ✓

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Si $g: A \to I_m$ es inyectiva, restringiendo la imagen,

$$\tilde{g}: A \to \operatorname{im}(g) \subseteq I_m$$

$\tilde{g}$ es biyectiva. Así, A es equipotente a un subconj. de un conjunto finito (I_m), por lo que es finito ∎

CONJUNTOS FINITOS: EJEMPLOS

Ej 1 Probar que $\mathbb{N}$ es infinito.

Consideramos $\mathbb{N}-\{0\}$, que es un subconj. propio de $\mathbb{N}$ y definimos

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}-\{0\}$$
$$n \longmapsto n+1$$

Es sencillo ver que f es una biyección, por lo que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}-\{0\}$. Si $\mathbb{N}$ fuera finito, no podría ser equipotente a un subconj. propio suyo. ✓

Ej 2 Sean $A_1, \dots, A_n$ conj. finitos. Probar que:

(a) $A_1 \cup \dots \cup A_n$ es finito.

Probamos primero que si A_1, A_2 son finitos, entonces $A_1 \cup A_2$ también lo es:

Si $A_1 = \emptyset$ o $A_2 = \emptyset$, el resultado es trivial porque

$$\emptyset \cup A_2 = A_2 \quad / \quad A_1 \cup \emptyset = A_1 \quad / \quad \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Sup. que $A_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \neq \emptyset$; por ser finitos, existen

$$f: I_n \to A_1 \quad ; \quad g: I_m \to A_2$$

biyectivas con $n, m \in \mathbb{N}$. Definimos

$$h: I_{m+n} \longrightarrow A_1 \cup A_2$$
$$k \longrightarrow \begin{cases} f(k) & k = 1, \dots, n \\ g(k-n) & k = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

Hay que "mover" g n posiciones

k	$g(k-n)$
$n+1$	$g(1)$
$n+2$	$g(2)$ ✓
$\vdots$	$\vdots$
$n+m$	$g(m)$

La función h está bien definida.

Para ver que es biyectiva, por el Corolario 3 (Caract. de Conj. Finitos) basta ver que es <u>sobre</u>:

Sea $y \in A_1 \cup A_2$

- Si $y \in A_1$, por ser f sobreyectiva, existe $k \in I_n$ con $f(k) = y \implies h(k) = f(k) = y$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$ ✓

- Si $y \in A_2$, por ser g sobreyectiva, existe $k \in I_m$ con $g(k) = y \implies h(\underbrace{k+n}_{k}) = g(k+n-n) = g(k) = y$ para algún $k+n \in \{n+1, \ldots, n+m\}$ ✓

$\implies A_1 \cup A_2$ es finito ✓

Probamos ahora que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ es finito por inducción

- Caso base ($n=1$) Es trivial que A_1 finito

  ($n=2$) Acabamos de ver que $A_1 \cup A_2$ es finito.

- Caso general Sup. que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ es finito.

$$\underbrace{(A_1 \cup \ldots \cup A_n)}_{B \text{ es finito por HIP.}} \cup \overbrace{A_{n+1}}^{\text{finito}} \text{ es finito ✓}$$

(Lo vemos como unión de dos conj. finitos y eso ya lo tenemos probado).

(b) $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ es finito

$A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq A_1$ es un subconjunto de un conj. finito $\implies$ Es finito ✓

(c) $A_1 \times \cdots \times A_n$ es finito

Probamos primero que $A_1 \times A_2$ es finito.

Sea $A_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{1n}\}$ para cierto $n \in \mathbb{N}$

Observamos que el conjunto $\{a_{1i}\} \times A_2$ es finito para cada $i = 1, \ldots, n$, pues

$$f_i : \{a_{1i}\} \times A_2 \longrightarrow A_2$$
$$(a_{1i}, a) \longmapsto a$$

es una biyección.

Pero ahora,

$$A_1 \times A_2 = (\{a_{11}\} \times A_2) \cup (\{a_{12}\} \times A_2) \cup \ldots \cup (\{a_{1n}\} \times A_2)$$

que es unión finita de conj. finitos

$$\Rightarrow A_1 \times A_2 \text{ finito} \checkmark$$

Usando inducción, probamos que $A_1 \times \ldots \times A_n$ es finito.

- Caso base $(n=1)$ A_1 finito trivialmente

  $(n=2)$ $A_1 \times A_2$ acabamos de ver que es finito

- Caso general Sup. que $A_1 \times \ldots \times A_n$ es finito

$$\underbrace{(A_1 \times \ldots \times A_n)}_{\substack{B \text{ es finito} \\ \text{por HIP}}} \times \overbrace{A_{n+1}}^{\text{finito}} \text{ es finito} \checkmark$$

(Vemos el conj. como producto cartesiano de dos conj. finitos)

Ej 3 Probar que si $A \times B$ finito, entonces A y B son finitos.

Consideramos la proyección sobre la 1^a componente:

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$$
$$(a,b) \longmapsto a$$

que es trivialmente sobreyectiva. Además, como $A \times B$ es finito, existe una biyección

$$f : I_n \longrightarrow A \times B$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. La composición $\pi_1 \circ f : I_n \longrightarrow A$ es sobreyectiva y, por el Corolario 3, A es finito.

Un argumento similar con

$$\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$
$$(a,b) \longmapsto b$$

se usa para probar que B es finito ✓

CONJUNTOS NUMERABLES Y NO NUMERABLES

Def (Conj. numerable) Sea X un conjunto. Decimos que es numerable si es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$. En este último caso, si $X \sim \mathbb{N}$, decimos que X tiene cardinal infinito-numerable y escribimos

$$|X| = \aleph_0$$

"Aleph sub-cero"

Representa el cardinal de $\mathbb{N}$

Ej: Demostrar que $\mathbb{Z}$ es numerable

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$\mathbb{N}$ pares — $\mathbb{Z}$ $\oplus$

$\mathbb{N}$ impares — $\mathbb{Z}$ $\ominus$

$\mathbb{N}$ está "dentro de" $\mathbb{Z}$ ¿Hay más elementos en $\mathbb{Z}$ que en $\mathbb{N}$?

Parece que sí pero... ¿y si los "emparejamos"?

¡TODOS ESTÁN EMPAREJADOS! → Hay el mismo nº de elem's

Formalmente, para ver que $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, hay que buscar una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & n \text{ par} \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

f es biyectiva:

- f iny Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $f(n) = f(m)$

→ Si n, m pares → $f(n) = f(m) \Rightarrow \dfrac{n}{2} = \dfrac{m}{2} \Rightarrow n = m$ ✓

→ Si n, m impares → $f(n) = f(m) \Rightarrow \cancel{-}\dfrac{n\cancel{+1}}{\cancel{2}} = \cancel{-}\dfrac{m\cancel{+1}}{\cancel{2}} \Rightarrow n = m$ ✓

→ Si n par y m impar, no puede ser que $f(n)=f(m)$ porque uno es positivo y el otro negativo (si ambos son 0, $\frac{n}{2}=0 \Rightarrow n=0$; $-\frac{m+1}{2}=0 \Rightarrow m=-1 \notin \mathbb{N}$, tampoco puede ser). ✓

• $\underline{f \text{ sobre}}$ Dado $x_0 \in \mathbb{Z}$ fijo.

→ Si $x_0 \geq 0$, $\frac{n}{2}=x_0 \Rightarrow n=2x_0$

$$f(\underbrace{2x_0}_{\text{par}}) = \frac{2x_0}{2} = x_0 \checkmark$$

→ Si $\underline{x_0<0}$, $-\frac{n+1}{2}=x_0 \to \frac{n+1}{2}=-x_0$

$$\to n+1=-2x_0 \to n=\boxed{-2x_0}-1$$

positivo

Como min $n=0$, $n \in \mathbb{N}$ ✓

$$f(\underbrace{-2x_0-1}_{\text{impar}}) = -\frac{(-2x_0-1)+1}{2}$$

$$= -\frac{-\cancel{2}x_0 \cancel{-1} \cancel{+1}}{\cancel{2}} = x_0 \checkmark$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ es numerable

Ej Demostrar que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable

Utilizamos el T. de Cantor-Schröder-Bernstein.

• $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$\quad n \longmapsto (n,n)$ claramente es inyectiva ✓

• $g: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $g(n,m)=2^n\cdot 3^m$ ¿g iny?

Sean $(n,m),(n',m') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con $g(n,m)=g(n',m')$.

$\Rightarrow 2^n\cdot 3^m = 2^{n'}\cdot 3^{m'}$ $\quad n-n'>0 \quad 2^0=1$

Si $n>n'$ ×, $2^{n-n'}\cdot 3^m = 2^{n'-n'}\cdot 3^{m'} \Rightarrow \underbrace{2^\alpha\cdot 3^m}_{\text{par}} = \underbrace{3^{m'}}_{\text{impar}}$ IMPOSIBLE

Si $n < n'$, es análogo

Necesariamente, $n = n'$ y $2^{n} \cdot 3^{m} = 2^{n'} \cdot 3^{m'}$

$\Rightarrow 3^{m} = 3^{m'}$

Para que dos potencias de 3 sean iguales, sus exp. deben ser iguales, así que $m = m'$

$\Rightarrow (n,m) = (n',m') \Rightarrow g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva ✓

Por el Teorema de C-S-B, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$,

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Ej Demostrar que $\mathbb{N} - \{2\}$ es numerable.

Idea:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & \mathbb{N} \\
\downarrow & \downarrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & & \\
0 & 1 & \cancel{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & \mathbb{N} - \{2\}
\end{array}$$

Definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{2\}$

$$n \longmapsto \begin{cases} n, & n < \boxed{2} \\ n+1, & n \geq \boxed{2} \end{cases}$$

Es el i en el que cambia la def.

¿Y si fuera otro? Lo pondríamos aquí

Esta función es biyectiva.

- f inyectiva ✓ Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $f(n_1) = f(n_2)$.
  - → Si $n_1, n_2 < 2 \Rightarrow n_1 = n_2$ ✓
  - → Si $n_1, n_2 \geq 2 \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$ ✓
  - → Si $n_1 < 2$; $n_2 \geq 2 \Rightarrow n_1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 - n_2 = 1$

    Pero n_1 es menor que n_2, su diferencia no puede ser 1 $\Rightarrow$ Este caso no se da porque es imposible que suceda $f(n_1) = f(n_2)$.
  - → Si $n_1 \geq 2$; $n_2 < 2$ pasa igual.
- f sobre. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N} - \{2\}$ fijo
  - → Si $n_0 < 2$; $f(n_0) = n_0$ ✓

→ Si $n_0 \geq 2$; $f(n_0-1) = n_0 - 1 + 1 = n_0$ ✓

$f(n) = n+1$ si $n \geq 2$.

$\Rightarrow \mathbb{N} - \{2\}$ es numerable.

¿Qué papel juega realmente el 2 aquí?

No juega ningún papel más que es el punto de cambio de def de la función.

Podemos generalizar el ej. anterior: fijado $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} - \{n_0\}$ es numerable usando la función

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{n_0\}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n, & \text{si } n < n_0 \\ n+1, & \text{si } n \geq n_0. \end{cases}$$

¿Qué ocurre si quitamos dos elementos?

Ej Demostrar que $\mathbb{N} - \{2,5\}$ es numerable.

Idea:

0	1	$\boxed{2}$	3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	8	9 ...	$\mathbb{N}$
0	1	$\cancel{2}$	3	4	$\cancel{5}$	6	7	8	9 ...	$\mathbb{N} - \{2,5\}$

Definimos la función:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{2,5\}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n, & \text{si } n < 2 \\ n+1, & \text{si } 2 \leq n < 4 \\ n+2, & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

Esta función es biyectiva (comprobarlo), por lo que $\mathbb{N} - \{2,5\}$ es numerable ✓

Ej Sea $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ un conj. finito cuyos elem's no son n^{os} naturales. Demostrar que $\mathbb{N}\cup X$ es numerable.

Idea: "Meter" los elem's de X al principio de la lista y que luego estén todos los naturales.

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow \mathbb{N}\cup X$$

$$n\longmapsto \begin{cases} x_{n+1} & n=0,\dots,k-1 \\ n-k & n\geq k \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_k$

$0, 1, 2, 3, \dots$

Se comprueba fácilmente que f es biyectiva.

$\Longrightarrow \mathbb{N}\cup X$ numerable

¿Qué ocurre si en X hay n^{os} naturales?

Ej Sea $X=\{x_1, x_2, \underbrace{35}_{x_4}, x_3, \underbrace{47}_{x_5}\}$, donde $x_i\notin\mathbb{N}$. Demostrar que $\mathbb{N}\cup X$ es numerable.

Si hacemos lo mismo de antes,

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow \mathbb{N}\cup X$$

$$n\longmapsto \begin{cases} x_{n+1}, & n<5 \\ n-5, & n\geq 5 \end{cases}$$

X: $x_1,\dots,x_5$

$\mathbb{N}$: $0, 1, 2, \dots$

Problema: f no es iny:

$f(3)=x_4=35$

$f(40)=35$

Esto ocurre porque los naturales de X se repiten en la imagen. ¿Cómo lo arreglamos? "Separando" los naturales de X

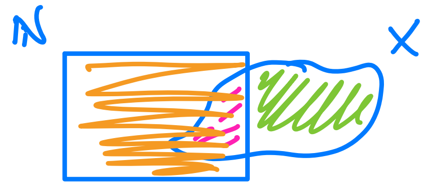
Escribimos

$$\mathbb{N}\cup X = \mathbb{N}\cup \underbrace{(X-\mathbb{N})}$$

Es una unión disjunta

Es finito por ser X finito. De hecho,

$$X-\mathbb{N}=\{x_1,x_2,x_3\}$$



Definimos ahora

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup X \qquad x_1, x_2, x_3 \qquad \underline{\underline{X - \mathbb{N}}}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} x_{n+1}, & \text{si } n < 3 \\ n-3, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$0, 1, 2, \ldots \quad \mathbb{N}$

Basta comprobar que f es biy. ✓

CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS NUMERABLES

Teorema (Caracterización de conj. numerables) Sea X un conj.

$$\left.\begin{array}{r} X \text{ infinito} \\ \text{Existe } f: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ sobre} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow X \text{ es infinito-numerable.}$$

DEM:

$\boxed{\Leftarrow}$ Si X es inf.-numerable, es infinito ✓ y existe $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ biyect, en part, sobre ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea X infinito con $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ sobre. Vamos a construir

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ biyectiva.}$$

Como f es sobre, $f^{-1}(X) \subseteq \mathbb{N}$ no vacío. Por el Ppio del Buen Orden en $\mathbb{N}$, existe un mínimo en $f^{-1}(X)$, a saber,

$$n_0 = \min f^{-1}(X)$$

Llamemos $x_0 = f(n_0)$. Definimos así

$$g(0) = x_0$$

Como X es infinito, $X - \{x_0\} \neq \emptyset$ y $f^{-1}(X - \{x_0\}) \subseteq \mathbb{N}$.
De nuevo por el Ppio del Buen Orden en $\mathbb{N}$, existe un mínimo en $f^{-1}(X - \{x_0\})$, a saber,

$$n_1 = \min f^{-1}(X - \{x_0\})$$

Obs

$n_0 < n_1$

- Como $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $n_0, n_1 \in f^{-1}(Y)$ por ser f sobre.

Pero n_0 es el mínimo de $f^{-1}(Y)$ $\Longrightarrow$ $n_0 \leq n_1$

- Además $n_0 \neq n_1$ porque si fueran iguales, $f(n_0) = x_0 = f(n_1)$ y sería una contradicción con que $n_1 \in f^{-1}(Y - \{x_0\})$.

Definimos $g(1) = x_1$.

$x_0 \quad \dots \quad x_k$

Sup. ahora que hemos definido así $g(0), \dots, g(k)$, y que estos elem's son distintos (g iny hasta k).
Consideramos $f^{-1}(X - \{x_0, \dots, x_k\}) \subseteq \mathbb{N}$, que tiene un mínimo,

$$n_{k+1} = \min f^{-1}(X - \{x_0, \dots, x_k\})$$

con $f(n_{k+1}) = x_{k+1}$. Este $x_{k+1} \notin \{x_0, \dots, x_k\}$ porque si fuera $x_{k+1} = x_i$, no podría ser que

$n_{k+1} \in f^{-1}(X - \{x_1, \dots, x_k\})$.

Definimos $g(k+1) = x_{k+1}$
y este elem es distinto de $g(0), \dots, g(k)$ (g iny. hasta k).
Por inducción, se define $g(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ y g es inyectiva.

Tenemos así $\boxed{g: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ iny.}}$

Por otro lado, definimos

$$\begin{aligned} h: X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \min f^{-1}(\{x\}) \end{aligned}$$

Si tomamos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\underbrace{f^{-1}(\{x_1\})}_{\neq \emptyset} \cap \underbrace{f^{-1}(\{x_2\})}_{\neq \emptyset} = \emptyset$

si $n \in f^{-1}(\{x_1\}) \cap f^{-1}(\{x_2\})$, Por ser $f: \mathbb{N} \to X$ sobre

$n \in f^{-1}(\{x_1\}) \Rightarrow f(n) = x_1$

$n \in f^{-1}(\{x_2\}) \Rightarrow f(n) = x_2$

pero $x_1 \neq x_2$ ⊗

→ n tendría 2 imágenes

$\Rightarrow \min f^{-1}(\{x_1\}) \neq \min f^{-1}(\{x_2\}) \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

$\Rightarrow \boxed{h: X \to \mathbb{N} \text{ iny}}$

Por el T. de Cantor-Schröder-Bernstein, $X \sim \mathbb{N}$,

$\Rightarrow X$ infinito-numerable. ✓✓ ∎

Corolario Si X numerable, $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ numerable.

"Todo subconj. de un conj. numerable, es numerable".

DEM:

- Si X finito, ya probamos que todo subconj. de un conj. finito es finito y, por tanto, numerable. ✓
- Si X es infinito-numerable:
  - Si Y es finito, es numerable ✓
  - Si Y es infinito, dado que existe una función

$f: \mathbb{N} \to X$ biyectiva, $Y \subseteq X$

se tiene que $\tilde{f}: \mathbb{N} \to X \cap Y = Y$ es sobre,

pues dado $y \in X \cap Y = Y \subseteq X$, $\exists n \in \mathbb{N}$ con $f(n) = y$

$\Rightarrow Y$ es numerable. ∎

↳ Caract. de Conj. Num

- Y infinito
- $f: \mathbb{N} \to Y$ sobre

UNIÓN Y PRODUCTO DE DOS CONJ. NUMERABLES

Prop X, Y conjuntos numerables $\Rightarrow$ $X \cup Y$ numerable.

DEM:

- Si X, Y son finitos, $X \cup Y$ es finito ✓
- Si X es inf-num e Y finito, hacemos inducción en el nº de elem's de Y:

- Caso base $Y = \{y_0\}$.

por ser X num.

Si $y_0 \in X$, $X \cup Y = X \Rightarrow f: \mathbb{N} \longrightarrow \overset{X \cup Y}{\overset{\shortparallel}{X}}$ biy $\Rightarrow X \cup Y$ num ✓

Si $y_0 \notin X$ construimos

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow X \cup Y$$
$$n \longmapsto \begin{cases} y_0, & n = 0 \\ f(n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$

g es biyectiva (comprobar)

$\Rightarrow$ $X \cup Y$ numerable ✓

- Caso general: Sup. que si $Y = \{y_0, \dots, y_k\}$, $X \cup Y$ es numerable.

$$X \cup \{y_0, \dots, y_k, y_{k+1}\} = \underbrace{(X \cup \{y_0, \dots, y_k\})}_{\text{num. por HIP}} \cup \underbrace{(X \cup \{y_{k+1}\})}_{\text{num por ser el caso base}}$$

Existen $g_1: \mathbb{N} \longrightarrow X \cup \{y_0, \dots, y_k\}$; $g_2: \mathbb{N} \longrightarrow X \cup \{y_{k+1}\}$ biyectivas. Definimos:

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow (X \cup \{y_0, \dots, y_k\}) \cup (X \cup \{y_{k+1}\})$$

$g_1(0), g_1(1), g_1(2), \dots$

$$n \longmapsto \begin{cases} g_1\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ par} \\ g_2\left(\frac{n-1}{2}\right) & n \text{ impar} \end{cases}$$

$g_2(0), g_2(1), g_2(2), \dots$

g es biy.

$\Rightarrow$ $X \cup Y$ numerable ✓

- Si X, Y infinito-numerables

Escribimos $X \cup Y = X \cup \underbrace{(Y-X)}$ Disjuntos

Como $Y-X \subseteq Y$ e Y numerable, $Y-X$ numerable

⇝ Si $Y-X$ finito (caso anterior) ✓

⇝ Si $Y-X$ inf.-num. existen

$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow X$; $\quad f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow Y-X$ biyectivas.

Definimos:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \overset{X \cup Y}{\overline{X \cup (Y-X)}}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} f_1\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ par} \\ f_2\left(\frac{n-1}{2}\right), & n \text{ impar} \end{cases}$$

f biyectiva

$\Rightarrow X \cup Y$ numerable ✓ $\blacksquare$

Proposición Si X, Y son conj numerables $\Rightarrow X \times Y$ numerable.

DEM:

- Si X, Y finitos, $X \times Y$ finito ✓
- Si X inf-num e Y finito. Inducción en el nº de elems de Y.

  - Caso base $Y = \{y_0\}$

    Como X num, existe $f : \mathbb{N} \to X$ biy. Definimos

    $$g : \mathbb{N} \longrightarrow X \times \{y_0\}.$$
    $$n \longmapsto (f(n), y_0)$$

    g biy $\Rightarrow X \times \{y_0\}$ numerable. ✓

  - Caso general Sup. que $X \times \{y_0, \ldots, y_k\}$ num. Escribimos:

$$X \times \{y_0, \ldots, y_k, y_{k+1}\} = \underbrace{(X \times \{y_0, \ldots, y_k\})} \cup \underbrace{(X \times \{y_{k+1}\})}$$

num por HIP. num por caso base

Como la unión de num es num ✓

- Si X, Y son inf-num.

Existen $f_1 : \mathbb{N} \to X$; $f_2 : \mathbb{N} \to Y$ biyectivas.

Definimos

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y$$
$$(n_1, n_2) \longmapsto (f_1(n_1), f_2(n_2))$$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ es biy } \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim X \times Y \\ \text{Pero } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow X \times Y \sim \mathbb{N} \text{ numerable} ✓$$

Transitiva ∎

UNIÓN Y PRODUCTO FINITO DE CONJ. NUMERABLES

Prop Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conj. numerables. Entonces $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ es numerable.

Notación $X_1 \cup \ldots \cup X_k = \bigcup_{n=1}^{k} X_k$

DEM: Inducción en k. Si $k = 1$, no hay unión

- Caso base $(k = 2)$ $X_1 \cup X_2$ es numerable (ya dem) ✓
- Caso general: Sup. que $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ es numerable.

$$\underbrace{(X_1 \cup \ldots \cup X_k)}_{\substack{\text{num por HIP} \\ X}} \cup \underbrace{X_{k+1}}_{\text{num}} = X \cup X_{k+1} \text{ es numerable (caso base) ✓}$$

∎

Prop Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conj. numerables. Entonces: $X_1 \times \ldots \times X_k$ es numerable.

Notación: $X_1 \times \ldots \times X_k = \prod_{n=1}^{k} X_n$

DEM: Inducción en k.

- Caso base $(k=2)$ $X_1 \times X_2$ numerable (ya probado)

- <u>Caso general</u> Sup que $X_1 \times \ldots \times X_k$ num.

$$\underbrace{[X_1 \times \ldots \times X_k]}_{\text{num por HIP}} \times \underbrace{X_{k+1}}_{\text{num}} = X \times X_{k+1} \text{ numerable (caso base)} ✓ ∎$$

X

UNIÓN Y PRODUCTO NUMERABLES DE CONJ NUMERABLES

<u>Notación</u> Podríamos tener un conjunto que tenga infinitos conjuntos. A esto lo llamamos familia de conjuntos. Por ejemplo, recordemos que

$$I_n = \{1, \_, n\} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

La familia de todos los conjuntos I_n la escribimos así:

$$\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{o} \quad \{I_n\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

En general, una familia (infinito-numerable) de conjuntos es:

$X_0, X_1, X_2, \ldots$

$$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Si queremos hacer la unión o el producto cartesiano de todos los elementos de la familia, escribimos:

<u>Unión</u>: $X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$

<u>Producto</u>: $X_0 \times X_1 \times X_2 \times \ldots = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$

Si queremos especificar desde qué índice empieza:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \qquad \prod_{n=0}^{\infty} X_n$$

<u>Proposición</u> Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ es numerable}$$

<u>DEM</u>: Como cada conjunto es numerable, existe

$$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow X_n \quad \text{biyectiva.}$$

- <u>Caso I</u>: Si los conjuntos de la familia son disjuntos dos a dos, esto es, si $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Definimos la función

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

$$(n, i) \longmapsto f_i(n)$$

n nos da el natural que usar en f_i

i nos da en que X_i estamos, para usar su f_i

Hay que ver que g es biyectiva:

- <u>g iny.</u> Sean $(n_1, i), (n_2, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $g(n_1, i) = g(n_2, j) \Rightarrow \underbrace{f_i(n_1)}_{X_i} = \underbrace{f_j(n_2)}_{X_j}$.

  $f_i: \mathbb{N} \to X_i$; $f_j: \mathbb{N} \to X_j$, pero como $X_i \cap X_j = \emptyset$, para que se dé la igualdad, necesariamente, $\boxed{i = j}$

  Tenemos entonces $f_i(n_1) = f_i(n_2)$. Pero f_i es biyectiva, en part, inyectiva $\Rightarrow \boxed{n_1 = n_2} \to (n_1, i) = (n_2, j)$ ✓

- <u>g sobre.</u> Tomamos $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Existe $i \in \mathbb{N}$ con $x \in X_i$; usando $f_i: \mathbb{N} \to X_i$, que es biy. y por tanto, sobreyectiva, $\exists n \in \mathbb{N}$ con $x = f_i(n)$

  $$\Rightarrow x = f_i(n) = g(n, i) \checkmark$$

Esto demuestra que $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es biyectiva

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \\ \text{Pero } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Transitiva}]{} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \sim \mathbb{N} \text{ es numerable.}$$

- <u>Caso II:</u> Si hay intersecciones no vacías entre los X_i.

Podemos escribir

$$X_0 \cup X_1 = X_0 \cup (X_1 - X_0)$$

$$(X_0 \cup X_1) \cup X_2 = X_0 \cup (X_1 - X_0) \cup (X_2 - (X_0 \cup X_1))$$

Vamos "quitando" de cada X_i lo que tiene en común con todos los conjuntos anteriores. De hecho, definamos:

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \\ Y_i = X_i - \bigcup_{k=0}^{i-1} X_k \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$Y_0 = X_0$; $Y_1 = X_1 - X_0$; $Y_2 = X_2 - (X_0 \cup X_1)$, ...

La familia $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple:

(i) $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ para $i \neq j$ (Por construcción)

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$

Si $x \in X_i$ y no en los anteriores, $x \in Y_i$

Si x está "compartido" con algún X_j con $j<i$, aparece en X_j anterior

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff \exists X_i$ con $x \in X_i$

$\Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, i\}$ con $x \in Y_j$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \Rightarrow \exists Y_i$ con $x \in Y_i = X_i - \left(\bigcup_{k=0}^{i-1} X_k\right)$

$\Rightarrow x \in X_i \Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$

Por el caso I sabemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ es numerable

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es numerable ✓ ∎

? Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conj. numerables,

¿es $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ numerable?

Ej Estudiar el cardinal de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{Q}$

Obs: $\mathbb{N}$ num $\Rightarrow$ $\mathbb{N}-\{0\}$ num. $\Rightarrow (\mathbb{N}-\{0\}) \times (\mathbb{N}-\{0\})$ num

Existe $f_0 : \mathbb{N} \longrightarrow (\mathbb{N}-\{0\}) \times (\mathbb{N}-\{0\})$ biy.

Definimos

$$f: (\mathbb{N}-\{0\}) \times (\mathbb{N}-\{0\}) \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \quad \text{Racionales positivos}$$
$$(n_1, n_2) \longmapsto \frac{n_1}{n_2}.$$

- $\mathbb{Q}^+$ es infinito
- f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $f \circ f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ sobre $\Big\} \Rightarrow$ T. Caracterización de conj. numerables

Para $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \rightsquigarrow \frac{p}{q} = f(p,q)$

$\Rightarrow \mathbb{Q}^+$ es numerable

Definimos $\quad g: \mathbb{Q}^- \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ es biyectiva

$$\frac{p}{q} \longmapsto -\frac{p}{q}$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}^-$ es numerable

$$\mathbb{Q} = \underbrace{\mathbb{Q}^-}_{\text{num}} \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{finito}} \cup \underbrace{\mathbb{Q}^+}_{\text{num}} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ es numerable } ✓$$

---

b) $\mathbb{R}$

Consideramos primero el intervalo $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Los elem's de $[0,1)$ los podemos escribir como

$$0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \quad \text{con} \quad 0 \leq x_i \leq 9 \quad \text{(Dígitos decimales)}$$

$0,5538109942\dots$

(Si el nº no tiene infinitos dígitos decimales es como si tuviera ceros a partir de una posición,

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 0,7500000\dots)$$

Supongamos que existe una biyección

$$\mathbb{N} \longrightarrow [0,1)$$

Indica a qué $n \in \mathbb{N}$ está asociado

Indica la posición decimal

$0,523187\dots \qquad 0 \longmapsto 0, x_{00} x_{01} x_{02} x_{03} \dots$

$0,201400\ldots \qquad 1 \longmapsto 0, x_{10}\, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}\ldots$

$0,9911052\ldots \qquad 2 \longmapsto 0, x_{20}\, x_{21}\, x_{22}\, x_{23}\ldots$

$0,3110788\ldots \qquad 3 \longmapsto 0, x_{30}\, x_{31}\, x_{32}\, x_{33}\ldots$

Vamos a crear un número que <u>no</u> está en la lista.

Cambiamos la posición

$$x_{ii} \longrightarrow \begin{cases} 4 & \text{si } x_{ii} = 0 \\ 0 & \text{si } x_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 0,0404\ldots$

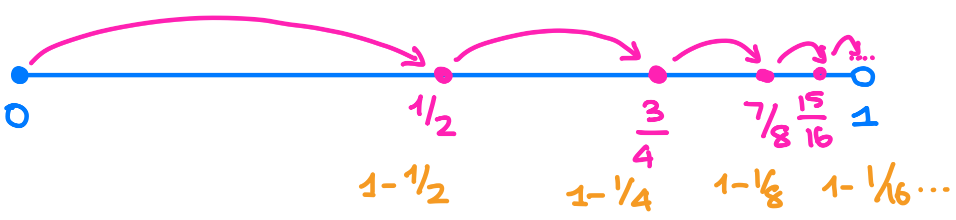
El nº que creamos es distinto del asociado al 0 porque x_{00} es distinto; es distinto del asociado a 1 porque x_{11} es distinto; es distinto del asociado a 2, 3, 4… ¡A TODOS!

$\Longrightarrow$ No se puede hacer una biyección entre $\mathbb{N}$ y $[0,1)$ porque quedan elementos sin emparejar en $[0,1)$.

$\Longrightarrow [0,1)$ <u>no</u> es numerable.

<u>Obs</u>: Este razonamiento se llama argumento de la diagonal de Cantor.

Vamos a construir ahora una biyección entre $[0,1)$ y $(0,1)$, usando una función que utiliza lo que llamamos desplazamiento numerable. La <u>idea</u> es que, como son 'casi' el mismo intervalo, salvo el 0, vamos a desplazar un conj. numerable de elementos para "quitar el 0".



Consideramos:

$$g: [0,1) \longrightarrow (0,1)$$

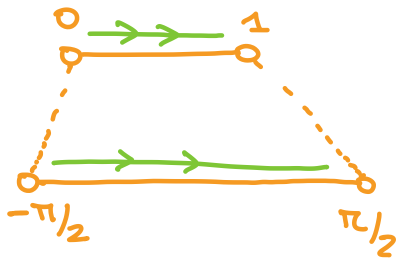
$$x \longmapsto \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x = 1-\dfrac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N} \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Desplazamiento numerable

g es biyectiva.

$\Rightarrow$ Como $[0,1)$ no es numerable, $(0,1)$ tampoco lo es.

Consideramos ahora una función



$$h: (0,1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t \longmapsto \underbrace{(1-t)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) + t\cdot\frac{\pi}{2}}_{\pi t - \frac{\pi}{2}}$$

- $t=0 \rightarrow h(0) = -\frac{\pi}{2}$
- $t=1 \rightarrow h(1) = \frac{\pi}{2}$
- h continua.

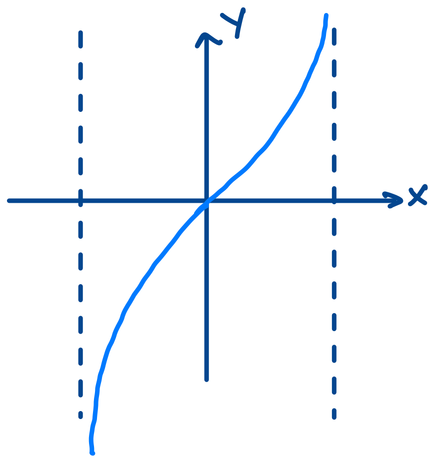
h es biyectiva

$\Rightarrow$ Como $(0,1)$ no es numerable, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tampoco lo es.

Por último, consideramos

$$F: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \tan\alpha$$



F es biyectiva.

$\Rightarrow$ Como $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ no es numerable,

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ no es numerable}}$$

Este ejemplo nos dice que, aunque tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos, hay más elementos en $\mathbb{R}$.

De hecho, el cardinal de $\mathbb{R}$ se denota por

$$|\mathbb{R}| = c$$

y se llama cardinal del continuo.

Se tiene que,

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|, \text{ es decir, } \aleph_0 < c.$$

<u>Proposición</u>. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces, en general,

$$\underbrace{\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n}_{\text{Producto cartesiano}} \quad \text{no es numerable}$$

<u>DEM</u>: Buscamos un contraejemplo.

Consideramos $\quad X_n = \{0, 1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{ \underbrace{(x_0, x_1, x_2, \dots)}_{\text{Sucesión (infinita) de 0's y 1's.}} : x_i \in X_i \}$$

$x_i = 0$ o $x_i = 1$

Supongamos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ sí es numerable. Existe

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \quad \text{biyectiva}$$

Posición en la "lista"

$$\begin{array}{lcl}
0 & \longmapsto & (x_{00}, x_{01}, x_{02}, \dots) \\
1 & \longmapsto & (x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots) \\
2 & \longmapsto & (x_{20}, x_{21}, x_{22}, \dots) \\
\vdots & &
\end{array}$$

Posición en la sucesión

Vamos a construir una sucesión que <u>no</u> esté en la lista. <u>Idea</u>: Argumento diagonal de Cantor.

Definimos $\quad y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \quad$ como:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{ii} = 0 \\ 0, & \text{si } x_{ii} = 1 \end{cases}$$

Así todos los elem's de y son distintos de todos elementos de la lista porque $y_i \neq x_{ii}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Esto demuestra que no puede existir tal biyección f y, por tanto, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ **no** es numerable. ■

CARDINAL DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

¿Qué relación hay entre $|X|$ y $|\mathcal{P}(X)|$?

Proposición Sea X un conjunto. Entonces

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|$$

DEM: Supongamos que no es así y que $X \sim \mathcal{P}(X)$.

Entonces $\boxed{\text{existe } f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X) \text{ biyectiva.}}$

Vamos a definir el conjunto

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Subconj. de X de los elem's que no están en su propia imagen.

Como $Y \subseteq X$, por definición, $Y \in \mathcal{P}(X)$.

Como f es sobreyectiva existe $x_0 \in X$ con $f(x_0) = Y$.

- ¿$x_0 \in Y$?

  Si $x_0 \in Y \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x_0 \notin f(x_0) = Y$ (Imposible)

- ¿$x_0 \notin Y$?

  Si $x_0 \notin Y \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x_0 \in f(x_0) = Y$ (Imposible)

¡CONTRADICCIÓN!

No puede existir $f: X \to \mathcal{P}(X)$ biyectiva (en part, sobreyectiva). Aunque sí puede ser inyectiva:

$$X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$x \longmapsto \{x\}.$$

Estricto

$\Rightarrow |X| < |\mathcal{P}(X)|$ ■

Corolario $\underbrace{|\mathbb{N}|}_{\aleph_0} < \underbrace{|\mathcal{P}(\mathbb{N})|}$ No numerable

DEM: Consecuencia directa de la Prop. anterior ∎

Obs: $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots$

Infinito (num) Infinito más grande ¡Infinito más grande aún!

¡Existen infinitos infinitos diferentes! ¡Unos estrictamente con más elementos que otros!

Notación: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ $\quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_1$ $\quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = \aleph_2 \dots$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

$\boxed{\text{CARDINALES TRANSFINITOS.}}$

Hipótesis del Continuo Recordemos que $|\mathbb{R}| = c$. La hipótesis del continuo afirma que $\aleph_0 < c$ y entre $\aleph_0$ y c no hay ningún otro cardinal (no existe un conjunto con cardinalidad entre $\aleph_0$ y c)

En el siglo XX, Kurt Gödel y Paul Cohen demostraron que la hipótesis del continuo es un enunciado indecidible en la Tª de Conjuntos basada en los Axiomas de Zermelo - Fraenkel (no se puede demostrar que es cierta ni que es falsa a partir de los axiomas).

Aquí solo "numerable"

Propiedades de los conjuntos infinito-numerables

Sea X un conjunto numerable.

1. $Y \subseteq X$ finito $\Rightarrow X - Y$ numerable
2. $Y \subseteq X$ infinito $\Rightarrow Y$ numerable
3. Z finito
   - $X \cup Z$ numerable
   - $X \cap Z$ finito.
   - $X \times Z$ numerable
4. Z numerable
   - $X \cup Z$ numerable
   - $X \cap Z$???
   - $X \times Z$ numerable

Sean $W_1, \ldots, W_n$ conjuntos numerables

(i) $\bigcup_{k=1}^{n} W_k$ numerable (Unión finita de num es num)

(ii) $W_1 \times \ldots \times W_n$ numerable (Prod. finito de num es num)

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia (numerable) de conj. num.

(I) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ numerable

(II) $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ no numerable en general.