

Cardinalidad

Notación

En esta hoja, si X e Y son conjuntos equipotentes, escribimos $X \sim Y$. Además,

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

- Sean X, Y conjuntos con $X \subseteq Y$ y sea $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Demostrar que existe una función $F : X \rightarrow Y$ biyectiva, esto es, que X e Y son conjuntos equipotentes.

- (Teorema de Cantor-Schröder-Berstein II)** Sean X, Y conjuntos y sean

$$f : X \rightarrow Y; \quad g : Y \rightarrow X$$

ambas sobreyectivas. Demostrar que X e Y son equipotentes.

- Sean X, X', Y, Y' conjuntos con $X \sim Y$ y $X' \sim Y'$. Demostrar que:

- $X \times X' \sim Y \times Y'$.

- Si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $X \times Y \sim X \times \{0, 1\}$.

- Si $X \cap X' = \emptyset$ e $Y \cap Y' = \emptyset$, entonces $X \cup X' \sim Y \cup Y'$.

- Demostrar que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son conjuntos finitos, entonces también lo son:

- $\bigcup_{k=1}^n A_k$

- $\bigcap_{k=1}^n A_k$

- $A_1 \times \dots \times A_n$

- Probar que si $X \times Y$ es un conjunto finito, entonces X e Y también son finitos.

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, definimos el conjunto

$$X_m = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq 1 \text{ y } mq \in \mathbb{Z}\}.$$

Probar que X_m es finito y calcular su cardinal.

- Demostrar que si el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ es finito para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces cada componente, $X_1, X_2, \dots, X_n$ es finita.

- Sea $f : I_n \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Demostrar que $\text{im}(f)$ es un conjunto finito.

- (Generalización del ejercicio anterior)* Sea X un conjunto finito no vacío y sea Y otro conjunto no vacío. Consideramos una función $f : X \rightarrow Y$. Demostrar que $\text{im}(f)$ es un conjunto finito.

- Sea X un conjunto no vacío y sea $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ una función sobreyectiva. Demostrar que X es infinito. Dar un ejemplo en el que X cumpla las condiciones anteriores y sea numerable; y otro en el que no sea numerable.

- (Propiedades básicas de conjuntos infinito-numerables)**

Sea X un conjunto infinito-numerable. Demostrar que:

- Si $Y \subseteq X$ es finito, entonces $X - Y$ es infinito-numerable.

- Si $Y \subseteq X$ es infinito, entonces Y es infinito-numerable.

- Si Z es un conjunto finito, entonces

- 1) $X \cup Z$ es infinito-numerable.

- 2) $X \cap Z$ es finito.
 3) $X \times Z$ es infinito-numerable.
- d) Si W es un conjunto infinito-numerable, entonces
- 1) $X \cup W$ es infinito-numerable.
 2) $X \times W$ es infinito-numerable.
12. ¿Es el conjunto de los números irracionales numerable?
13. **(Propiedades de familias finitas de conjuntos infinito-numerables)**
 Sean $X_1, \dots, X_n$ conjuntos infinito-numerables. Demostrar que:
- a) $\bigcup_{k=1}^n X_k$ es infinito-numerable.
 b) $X_1 \times \dots \times X_n$ es infinito-numerable.
14. **(Propiedades de familias numerables de conjuntos infinito-numerables)**
 Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos infinito-numerables. Demostrar que:
- a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es infinito-numerable.
 b) $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es infinito-numerable.
15. ¿Es infinito-numerable la unión infinito-numerable de conjuntos finitos? ¿Y el producto cartesiano?
16. Sea X un conjunto infinito de cardinal no numerable y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto numerable. ¿Qué cardinalidad puede tener $X - Y$?
17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:
- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ | c) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ | e) $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ |
| b) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ | d) $\mathbb{R}^2$ | f) $\mathbb{R}^n$ |
18. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:
- a) $R = \{\text{Raíces reales de polinomios con coeficientes reales}\}$
 b) **(Reales algebraicos)**
 $\overline{\mathbb{Q}} = \{\text{Raíces reales de polinomios con coeficientes racionales}\}$
 c) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen exactamente dos elementos.
 d) El conjunto de los reales en $[0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.