

Relaciones de orden

1. **(Orden heredado a un subconjunto)** Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Demostrar que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado, esto es, que A *hereda* el orden de X .

2. **(Orden inverso)** Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado. Definimos en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}^{-1}y \iff y\mathcal{R}x.$$

Demostrar que $(X, \mathcal{R}^{-1})$ es conjunto ordenado. A la relación $\mathcal{R}^{-1}$ se le llama **relación de orden inverso** de $\mathcal{R}$.

3. **(Orden lexicográfico en las sucesiones reales)** Consideramos el conjunto de todas las sucesiones reales

$$S = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos, para $(x_n), (y_n) \in S$,

$$(x_n) \leq (y_n) \iff x_k < y_k \text{ para el primer } k \in \mathbb{N} \text{ para el que } x_i \neq y_i.$$

Demostrar que es una relación de orden. ¿Es total o parcial?

4. **(Orden punto a punto en $\mathbb{R}^2$)** Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación:

$$(x_1, x_2) \leq_p (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2.$$

- a) Demostrar que $(\mathbb{R}^2, \leq_p)$ es un conjunto ordenado.
 - b) ¿Es un orden total o parcial?
 - c) Fijado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, representar gráficamente todos los puntos (y_1, y_2) del plano que cumplen que $(x_1, x_2) \leq_p (y_1, y_2)$.
5. **(Orden punto a punto en las sucesiones reales crecientes y acotadas)** Consideramos el conjunto de las sucesiones reales crecientes y acotadas

$$SC = \{(x_n) : (x_n) \text{ creciente y acotada}\}.$$

Definimos, para $(x_n), (y_n) \in SC$,

$$(x_n) \leq (y_n) \iff x_k \leq y_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que es una relación de orden. ¿Es total o parcial?

6. **(Orden en polinomios)** Definimos en el conjunto de los polinomios de una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]$, la siguiente relación: para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, dados por

$$p(x) = a^n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad q(x) = b^m x^m + \dots + b_1 x + b_0;$$

definimos

$$p(x) \leq_{pol} q(x) \iff \begin{cases} \deg p(x) < \deg q(x), \text{ o} \\ \deg p(x) = \deg q(x), (a_n, \dots, a_0) \leq_{lex} (b_n, \dots, b_0) \end{cases}$$

donde $\leq_{lex}$ es el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostrar que $(\mathbb{R}[x], \leq_{pol})$ es un conjunto ordenado. ¿Es un orden total o un orden parcial?

7. En los polinomios con coeficientes enteros, $\mathbb{Z}$ definimos, dados $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

$$p(x) \mathcal{R} q(x) \iff \text{Los coeficientes de } p(x) \text{ dividen a los correspondientes de } q(x).$$

Estudiar por qué no es una relación bien definida y redefinirla, si es posible, para que sea una relación de orden.

8. Demostrar que si un subconjunto A de un conjunto ordenado $(X, \leq)$ no tiene elementos maximales, tampoco puede tener máximo; y que si no tiene mínimo, no puede tener elemento minimales.
9. En $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ consideramos el subconjunto

$$X = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : S \text{ infinito}\}.$$

Estudiar sus elementos maximales y minimales, así como si tiene máximo o mínimo.

10. Demostrar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- Todo subconjunto de un conjunto ordenado tiene supremo e ínfimo.
- Todo subconjunto propio de un conjunto ordenado tiene supremo e ínfimo.
- Todo subconjunto de un conjunto ordenado, acotado superiormente tiene supremo.
- Todo subconjunto de un conjunto ordenado, acotado inferiormente tiene ínfimo.
- Si $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$ es un subconjunto acotado de X , entonces A tiene supremo e ínfimo.
- Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$ es un subconjunto acotado de X , entonces A tiene supremo e ínfimo.

11. (*) Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbb{R}_{>0}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

Consideramos este subconjunto con el orden punto a punto de $\mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R}_{>0}^2, \leq_p)$. Construir un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}_{>0}^2$ que tenga más de un elemento minimal pero que no tenga ni mínimo, ni máximo, ni elementos maximales, ni esté acotado inferior ni superiormente.

12. Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ con el orden usual:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 1\}$
- $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$
- $C = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{5}\}$
- $D = \left\{ \frac{1}{n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$