

Relaciones de equivalencia

1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en X . Dado $x_0 \in X$, demostrar que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$x_1, x_2 \in [x_0] \Rightarrow x_1 \mathcal{R} x_2.$$

2. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación

$$m \mathcal{R} n \iff |m| = |n|.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
 - Hallar las clases de equivalencia.
 - Determinar el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
 - Hallar una función biyectiva entre $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ y $\mathbb{N}$, demostrando que está bien definida.
3. Definimos en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ la relación

$$m \mathcal{R} n \iff \sqrt{m} - \sqrt{n} \in \mathbb{Z}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
 - Decidir si $4 \in [9]$.
 - Hallar $[16]$.
4. Definimos en $\mathbb{Q}$ la relación

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
 - Decidir si $\frac{9}{4} \in \left[\frac{1}{2}\right]$.
 - Hallar $[1]$ y $\left[\frac{2}{3}\right]$.
5. Definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación

$$(x, y) \mathcal{R} (u, v) \iff x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
 - Hallar $[(0, 0)]$ y $[(1, 0)]$.
 - Hallar $[(x_0, y_0)]$ para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, distinto del origen y dar una descripción geométrica.
 - Comprobar que cualquier clase de equivalencia se puede escribir con un representante de la forma $[(k, 0)]$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$.
 - Describir el conjunto cociente.
6. Definimos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación:

$$(m, n) \mathcal{R} (p, q) \iff mq = np.$$

¿Es una relación de equivalencia?

7. **(Construcción de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$)** Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(m, n)\mathcal{R}(p, q) \iff m + q = n + p.$$

- a) Demostrar que es una relación de equivalencia.
 - b) Hallar las clases de equivalencia de los elementos $[(1, 0)]$ y $[(2, 1)]$.
 - c) Hallar la clase de equivalencia de un elemento genérico $[(m, n)]$.
8. Definimos la siguiente función:

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \quad f([m], [n]) = [m + n].$$

Demostrar que está bien definida.

9. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq 2$ y $m|n$ (esto es que m es divisor de n). Consideramos la función

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \quad f([x]_n) = [x]_m;$$

donde $[\cdot]_n$ representa la clase en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y $[\cdot]_m$, la clase en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Demostrar que la función está bien definida.

10. (*) Sea X un conjunto no vacío y sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una partición (finita) de X . Demostrar que esta partición induce relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en X y que esta es única.
11. (*) Sean X, Y conjuntos no vacíos, $\mathcal{R}_X$ una relación de equivalencia en X y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Demostrar que $\mathcal{R}_X$ induce una relación de equivalencia $\mathcal{R}_Y$, de modo que la imagen de una clase de equivalencia en X es una clase de equivalencia en Y .