

Funciones

1. Decidir si las siguientes expresiones son funciones o no:

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; f(n) = \sqrt{n}$.

b) $g : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}; g(n, m) = \pm \frac{n}{m}$

2. Hallar el dominio de las siguientes funciones, todas definidas en $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

c) $f(x) = \log_2(5x+1)$

e) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \sqrt{2-x}$

d) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2$

f) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$

3. Decidir si las siguientes funciones, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

4. Decidir si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas:

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = n(n+1)$

b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = n^2 + n + 1$

c) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}; f(n) = \frac{n}{n+1}$

d) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ par,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y sea $A, B \subseteq Y$. Demostrar que

a) $f(f^{-1}(A)) = f(X) \cap A$.

b) $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$

6. Sean X e Y dos conjuntos finitos no vacíos con m y n elementos respectivamente.

a) ¿Cuántas funciones diferentes $f : X \rightarrow Y$ hay?

b) ¿Cuántas funciones inyectivas diferentes $f : X \rightarrow Y$ hay?

7. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Justificar que si restringimos el conjunto de llegada a $\text{im } f$, la función resultante es sobreyectiva.

8. Sea X un conjunto no vacío y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Demostrar que la función

$$\iota : A \rightarrow X; f(a) = a$$

es una función inyectiva que no es la identidad. A esta función se la llama **función inclusión**.

9. Sean $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ funciones.

a) Demostrar que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

b) Demostrar que si $g \circ f$ es sobreyectiva, f no tiene por qué ser sobreyectiva.

10. Para las siguientes funciones, decidir si son invertibles. En caso de serlo, hallar la inversa; en caso contrario, restringir los conjuntos de definición para conseguir construir funciones invertibles.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sin x$

b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = 2n$

c) $h : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}; h(m, n) = \frac{m}{n}$