

RELACIONES DE ORDEN

Motivación: Conocemos conjuntos cuyos elementos están ordenados

Por ejemplo,

$$\mathbb{Z} \leadsto \dots \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$$

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \quad \dots \leq -7 \leq -\sqrt{2} \leq 0 \leq \pi \leq \pi+1 \leq \pi^2$$

¿Hay otros conjuntos que se puedan ordenar?

$\leadsto \mathbb{C}$ $\leadsto$ Polinomios $\leadsto$ Funciones
 $\leadsto$ Subconjuntos

¿Hay otros órdenes posibles de los conjuntos que conocemos?

Objetivo: Definir qué es un orden, ver tipos de órdenes y ejemplos

Df (Relación de orden) Sea X un conjunto no vacío

y sea R una relación binaria en X . R es una relación de orden en X si cumple:

- (i) Reflexiva. $xRx \quad \forall x \in X$
- (ii) Antisimétrica. $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y \quad \forall x, y \in X$
- (iii) Transitiva. $xRy, yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in X$.

Si esto pasa, decimos que (X, R) es un conjunto ordenado.

Ej: Decidir si son relaciones de orden:

a) En $\mathbb{R}$, para $x, y \in \mathbb{R}$

$$xRy \stackrel{df}{\iff} x < y$$

(-i) Reflexiva $x < x$ es falso $\times$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, <) \underline{\text{no}}$ es un conjunto ordenado

b) Para $x, y \in \mathbb{R}$

$$x R y \stackrel{\text{df}}{\iff} x \leq y$$

(i) Reflexive $x \leq x \checkmark \Rightarrow x R x$

(ii) Antisimétrica
$$\left. \begin{array}{l} x R y \Rightarrow x \leq y \\ y R x \Rightarrow y \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow x = y \checkmark$$

(iii) Transitiva
$$\left. \begin{array}{l} x R y \Rightarrow x \leq y \\ y R z \Rightarrow y \leq z \end{array} \right\} \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x R z \checkmark$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto ordenado.

Def (Orden total y orden parcial) Sea (X, R) un conjunto ordenado.

- R es un orden total si cualesquiera dos elementos de X están relacionados: $x, y \in X \Rightarrow x R y \text{ o } y R x$
- R es un orden parcial si hay al menos un par de elementos en X que no están relacionados.

Ej $(\mathbb{R}, \leq)$ es un orden total porque para todo $x, y \in \mathbb{R}$,
o bien $x \leq y$; o bien $y \leq x$.

Ej Decidir si los siguientes conjuntos están ordenados parcial
o totalmente.

a) $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$

Son como $(\mathbb{R}, \leq) \rightsquigarrow$ orden total

b) Sea $X \neq \emptyset$. Definimos para $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$A R B \stackrel{\text{df}}{\iff} A \subseteq B.$$

(i) Reflexive $A \subseteq A \Rightarrow A R A \checkmark$

(ii) Antisimétrica:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \\ B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = B \checkmark$$

(iii) Transitiva

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \\ B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \checkmark$$

$\Rightarrow (P(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

¿El orden es parcial o total? Pensemos en $X = \{1, 2\}$

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$$

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq X \quad \text{y} \quad \emptyset \subseteq \{2\} \subseteq X$$

Pero...

$$\{1\} \not\subseteq \{2\} \quad \text{y} \quad \{2\} \not\subseteq \{1\}$$

¡Hay dos elementos que no están relacionados!

$\Rightarrow (P(X), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

RELACIONES DE ORDEN: EJEMPLOS

Ej. Decidir si los siguientes conjuntos están ordenados parcial o totalmente:

a) Para $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m R n \Leftrightarrow m | n$$

$\swarrow$ m es divisor de n
 $\nwarrow$ n es múltiplo de m

(i) Reflexiva $m | m \Rightarrow m R m \checkmark$

(ii) Antisimétrica

$$\left. \begin{array}{l} m R n \Rightarrow \underline{m | n} \\ n R m \Rightarrow \underline{n | m} \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} m = n \checkmark$$



Si $m < n$, n no podría ser divisor de m ; y si

$n < m$, m no podría ser divisor de n .

(iii) Transitiva $m R n \Rightarrow m | n \Rightarrow n = m \cdot k$
 $n R p \Rightarrow n | p \Rightarrow p = n \cdot k' = m \cdot (k \cdot k') \Rightarrow$
 $\Rightarrow m | p \Rightarrow m R p \checkmark$

¿El orden es parcial o total?

$2, 3 \in \mathbb{Z} \quad 2 \nmid 3 \quad \text{y} \quad 3 \nmid 2 \Rightarrow \text{Parcial}$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, |)$ está ordenado parcialmente.

b) (Orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$) Para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 < y_1 \\ x_1 = y_1, \quad x_2 \leq y_2 \end{cases}$$

(i) Reflexiva: $(x_1, x_2) R (x_1, x_2)$ porque $x_1 = x_1, x_2 \leq x_2 \checkmark$

(ii) Antisimétrica:

$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \oplus \quad (y_1, y_2) R (x_1, x_2) *$

Caso 1 $\oplus \rightarrow x_1 < y_1$

$* \rightarrow y_1 < x_1$

IMPOSIBLE AMBAS $\rightarrow$ El caso 1 no se da.

Caso 2: $\oplus \rightarrow x_1 < y_1$ IMPOSIBLE $\rightarrow$ El caso 2 no se da

$* \rightarrow y_1 = x_1, y_2 \leq x_2$

Caso 3: $\oplus \rightarrow x_2 = y_2, x_2 \leq y_2$ IMPOSIBLE $\rightarrow$ El caso 3 no se da

$* \rightarrow y_2 < x_2$

Caso 4: $\oplus \rightarrow x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$

$* \rightarrow y_2 = x_2, y_2 \leq x_2$

$x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \checkmark$

(iii) Transitiva

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \quad (y_1, y_2) R (z_1, z_2)$$

• Caso 1 $\rightarrow x_1 < y_1$ $\rightarrow y_1 < z_1$ $\rightarrow x_1 < z_1 \Rightarrow (x_1, x_2) R (z_1, z_2) \checkmark$
 $\uparrow$ 1ª cond. de R

• Caso 2 $\rightarrow x_1 < y_1$ $\rightarrow x_1 < z_1 \Rightarrow (x_1, x_2) R (z_1, z_2) \checkmark$
 $\rightarrow y_1 = z_1, y_2 \leq z_2$

• Caso 3: $\rightarrow x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$ $\rightarrow y_1 < z_1 \Rightarrow x_1 < z_1 \Rightarrow (x_1, x_2) R (z_1, z_2) \checkmark$

• Caso 4: $\rightarrow x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$ $\rightarrow y_1 = z_1, y_2 \leq z_2$
 $\rightarrow x_1 = z_1, x_2 \leq z_2 \Rightarrow (x_1, x_2) R (z_1, z_2) \checkmark$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \text{lex})$ es un conjunto ordenado

¿Orden total o parcial? Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
siempre podemos comparar sus coordenadas $\Rightarrow$ Total

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \text{lex})$ es un conjunto totalmente ordenado.

c) En el conjunto $F = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ función} \}$ definimos:

$$f R g \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

(i) Reflexiva. $f R f$ porque $f(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [0, 1] \checkmark$

(ii) Antisimétrica $f R g \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) = g(x) \checkmark$
 $g R f \Rightarrow g(x) \leq f(x)$

(iii) Transitiva

$$\begin{aligned} fRg &\Rightarrow f(x) \leq g(x) \\ gRh &\Rightarrow g(x) \leq h(x) \end{aligned} \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq h(x) \Rightarrow fRh \quad \checkmark$$

¿ El orden es total o parcial?

Solo podemos comparar funciones cuyo dominio coincida, por lo que si $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones, pero

$$x_0 \in \text{Dom } f \quad \text{y} \quad x_0 \notin \text{Dom } g$$

no tiene sentido comparar $f(x)$ y $g(x)$.

$\Rightarrow (F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ordenar, según el orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$, los siguientes elementos:

$$\cancel{(-\pi, 0)}, (\pi, \pi^2), \cancel{(0, 1)}, \cancel{(-1, 1)}, \cancel{(1, -1)}, \cancel{(-1, -1)}, \cancel{(1, 1)}, \cancel{(0, e)}$$

$$(-\pi, 0) \leq (-1, -1) \leq (-1, 1) \leq (0, -e) \leq (0, 1) \leq (1, -1) \leq (1, 1) \leq (\pi, \pi^2)$$

ÓRDENES INDUCIDOS POR EL LEXICOGRAFICO

Notación: Escribimos el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ como $(\mathbb{R}^2, \leq_{\text{lex}})$

— ORDEN EN $\mathbb{C}$ —

Para $z, w \in \mathbb{C}$, $z = \alpha_1 + \alpha_2 i$, $w = \beta_1 + \beta_2 i$, con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

definimos:

$$zRw \stackrel{\text{del}}{\Leftrightarrow} (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\beta_1, \beta_2)$$

R es un orden en $\mathbb{C}$ por serlo $\leq_{\text{lex}}$ en $\mathbb{R}^2$:

(i) Reflexiva

↙ cierto por ser $\leq_{\text{lex}}$ un orden

$$zRz \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\alpha_1, \alpha_2) \quad \checkmark$$

(ii) Antisimetría

$\leq_{\text{lex}}$ es orden

$$\left. \begin{array}{l} z R w \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\beta_1, \beta_2) \\ w R z \Rightarrow (\beta_1, \beta_2) \leq_{\text{lex}} (\alpha_1, \alpha_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) \Rightarrow z = w$$

(iii) Transitiva

$\leq_{\text{lex}}$ es orden

$$\left. \begin{array}{l} z R w \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\beta_1, \beta_2) \\ w R t \Rightarrow (\beta_1, \beta_2) \leq_{\text{lex}} (\gamma_1, \gamma_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\gamma_1, \gamma_2) \Rightarrow z R t.$$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, R)$ es un conjunto totalmente ordenado

$(\mathbb{C}, \leq_{\text{lex}})$

$\uparrow$ Por serlo $(\mathbb{R}^2, \leq_{\text{lex}})$.

⚠ Como $(\mathbb{C}, R)$ está definido a partir de $(\mathbb{R}^2, \leq_{\text{lex}})$, es también un orden total.

Ej. Ordenar los siguientes elementos de $(\mathbb{C}, \leq_{\text{lex}})$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cancel{0} & \cancel{-2-i} & 3 & \cancel{-1+i} & \cancel{1+i} & \cancel{1-i} & \cancel{-1-i} & \cancel{-2+3i} & \cancel{-1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{\underline{0,1}} & \underline{\underline{-2,-1}} & (3,0) & \underline{\underline{-1,1}} & (1,1) & \underline{\underline{1,-1}} & \underline{\underline{-1,-1}} & \underline{\underline{-2,3}} & \underline{\underline{-1,0}} \end{array}$$

$$-2-i \leq -2+3i \leq -1-i \leq -1+i \leq i \leq 1-i \leq 1 \leq 1+i \leq 3$$

— ORDEN EN LOS MONOMIOS DE DOS VARIABLES —

Consideramos el conjunto de todos los monomios con coeficiente 1 con dos variables:

$$\text{Mon}[x,y] = \{ x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \}$$

Definimos

$$x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} R x^{\beta_1} y^{\beta_2} \iff (\alpha_1, \alpha_2) \leq_{\text{lex}} (\beta_1, \beta_2)$$

Como en $\mathbb{C}$, esto define una relación de orden total en los monomios.

Ordenar los siguientes monomios de menor a mayor según

el orden $\leq_{\text{lex}}$

$$\begin{array}{cccccccc}
 x^6 & \cancel{xy^7} & \cancel{x^2y^5} & \cancel{y^7} & \cancel{y^4} & \cancel{x^2y^4} & \cancel{x^2y^6} & \cancel{x^3} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 (6,0) & (1,7) & (2,5) & (0,7) & (0,4) & (2,4) & (2,6) & (3,0)
 \end{array}$$

$$y^4 \leq y^7 \leq xy^7 \leq x^2y^4 \leq x^2y^5 \leq x^2y^6 \leq x^3 \leq x^6$$

— GENERALIZACIÓN DEL ORDEN $\leq_{\text{lex}}$ A $\mathbb{R}^n$ —

Podemos generalizar el orden $\leq_{\text{lex}}$ a n componentes:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \begin{cases} x_1 < y_1 \\ x_1 = y_1, x_2 < y_2 \\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 < y_3 \\ \vdots \\ x_1 = y_1, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n \leq y_n \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^n, \leq_{\text{lex}})$ es un conjunto totalmente ordenado.

RELACIÓN DE ORDEN EN UN SUBCONJUNTO

Proposición Sea (X, R) un conjunto ordenado y $A \subseteq X$. Entonces (A, R) es un conjunto ordenado.

DETL: Como R cumple la reflexiva, la antisimétrica y la transitiva para todos los elem's de X y $A \subseteq X$, en particular, se cumplirá para los elem's de A . ■

Ej: Si consideramos $(\mathbb{Z}, \leq)$, la relación de orden también se da en $(\{1, 5, 10, 15, 20\}, \leq)$.

RELACIÓN DE ORDEN INVERSO

Proposición Sea (X, R) un conjunto ordenado. Definimos para

$$x, y \in X, \quad xR^{-1}y \stackrel{df}{\iff} yRx$$

Entonces (X, R^{-1}) es un conjunto ordenado y R^{-1} se llama orden inverso de R .

Dem:

(i) Reflexiva $xR^{-1}x$ porque xRx por ser R orden.

(ii) Antisimétrica R orden

$$\left. \begin{array}{l} xR^{-1}y \Rightarrow yRx \\ yR^{-1}x \Rightarrow xRy \end{array} \right\} \stackrel{R \text{ orden}}{\Rightarrow} x=y \checkmark$$

(iii) Transitiva R orden

$$\left. \begin{array}{l} xR^{-1}y \Rightarrow yRx \\ yR^{-1}z \Rightarrow zRy \end{array} \right\} \stackrel{R \text{ orden}}{\Rightarrow} zRx \Rightarrow xR^{-1}z \checkmark$$



Obs: (X, R^{-1}) ordena los elementos de X justo al contrario que (X, R)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, \leq) & \xrightarrow{\text{inv.}} & (\mathbb{Z}, \geq) \\ (\mathbb{Z}, |) & \xrightarrow{\text{inv}} & (\mathbb{Z}, \text{mult}) \end{array}$$

↑
"ser divisor de"

↑
"ser múltiplo de"

DIAGRAMAS DE HASSE

Un diagrama de Hasse es una representación gráfica de un conjunto ordenado (X, R) que cuenta con:

- Nodos: Son los elementos de X
- Aristas: Indican qué elementos están relacionados.



Definimos en $\mathbb{Z}^+$, el conjunto de los enteros positivos, para $m \in \mathbb{Z}^+$

$$D(m) = \{d \in \mathbb{Z}^+ : d|m\} \leftarrow \text{Cuj. de divisores positivos de } m$$

$$D^*(m) = D(m) - \{1, m\}. \leftarrow \text{Divisores no triviales de } m.$$

$$\text{Ej } D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}; \quad D^*(12) = \{2, 3, 4, 6\}$$

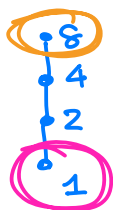
Consideramos en $\mathbb{Z}$ la relación de orden dada por

$$mRn \stackrel{df}{=} m|n.$$

Dibujar los diagramas de Hasse de los siguientes subconjuntos:

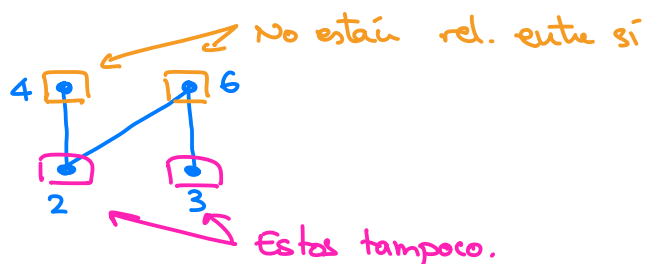
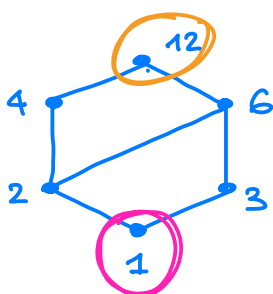
$$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$D^*(8) = \{2, 4\}$$



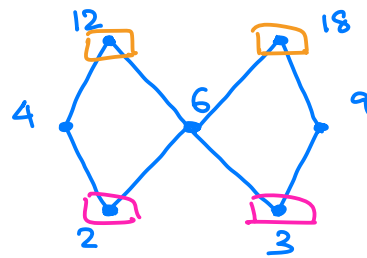
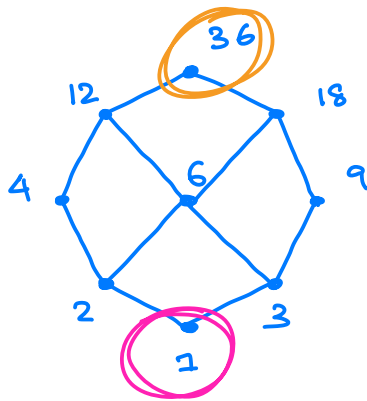
$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$D^*(12) = \{2, 3, 4, 6\}$$



$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$D^*(36) = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$$



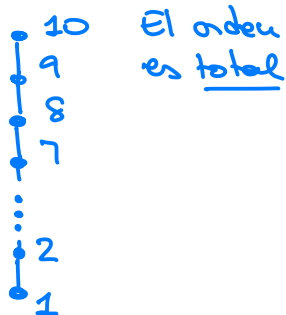
Obs: Los diagramas de la forma $D(m)$ tienen un elem por debajo de todos (1) y otro por encima (m); los de la forma $D^*(m)$ pueden tener varios elem's por encima o por debajo que no se relacionan entre sí.

¡Estos elem's tienen un nombre! $\rightarrow$ Próx. vídeo 😊

Obs 2: Los diagramas de Hasse son útiles para relaciones de orden parcial; si el orden es total, no son muy útiles.

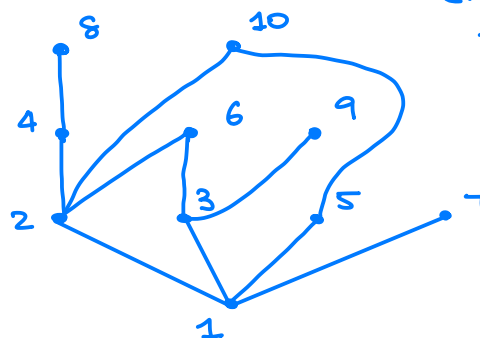
Ej: Diagramas de Hasse de:

$$(\{1, \dots, 10\}, \leq)$$



El orden es total

$$(\{1, \dots, 10\}, |)$$



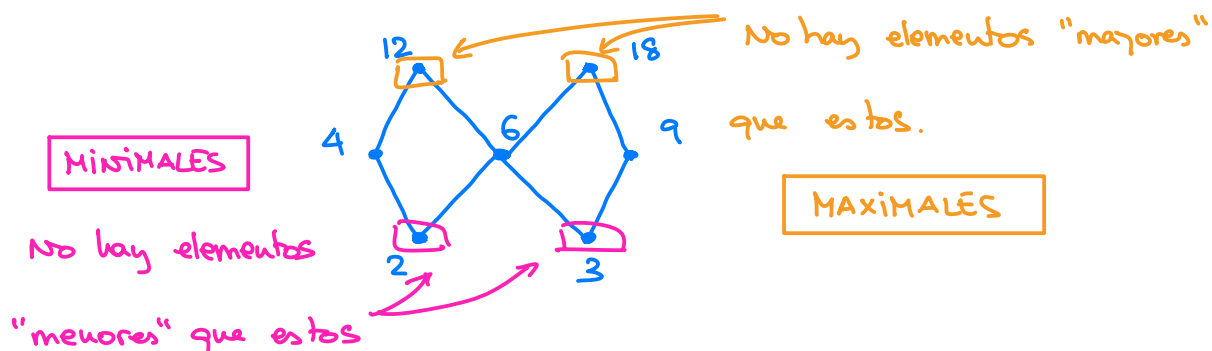
El orden es parcial

↑ Vemos qué elem's están relacionados y qué elem's no lo están

ELEMENTOS MAXIMALES Y MINIMALES. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Idea: En los diagramas de Hasse que vimos:

$D^*(36) = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ con el orden de divisibilidad



Notación: Para un conjunto ordenado (X, R) vamos a escribir $(X, \leq)$, aunque el orden no sea exactamente " $\leq$ ".

Def (Elementos maximales y minimales). Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Decimos que:

- $M \in A$ es un elemento maximal si ningún otro elem. de A es estrictamente mayor que M .

$$\forall a \in A \quad M \leq a \Rightarrow M = a.$$

- $m \in A$ es un elemento minimal si ningún otro elem. de A es estrictamente menor que m .

$$\forall a \in A \quad a \leq m \Rightarrow m = a.$$

Obs: Los elementos maximales y minimales siempre pertenecen al subconjunto. Además, puede haber más de un maximal y más de un minimal.

Q₁: ¿Un conjunto siempre tiene maximales y minimales?

Pensemos en $(\mathbb{Z}, \leq)$. Si M fuera maximal, no habría

ningún entero mayor que él, pero $M \leq M+1 \Rightarrow M$ no es maxl.
Igual con un minimal $\Rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$ no tiene maximales ni minimales.

Q₂: ¿Puede haber infinitos maximales o minimales?

Consideremos en $(\mathbb{Z}^+, |)$ el subconjunto

$$P = \{p \in \mathbb{Z}^+ : p \text{ primo}\} \cup \{1\}$$

Sea $p_0 \in P$, p_0 primo. ¿Es maximal?

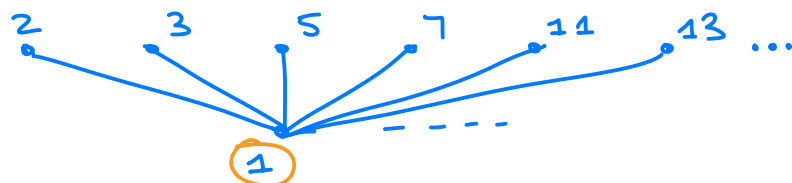
Supongamos que existe $q \in P$ tal que $p_0 | q$

- Si q primo, $q \neq p_0$, $p_0 \nmid q$.
- Si $q = 1$, $p_0 \nmid q$
- Si $q = p_0$, $p_0 | p_0 \checkmark$ ← Es la única posibilidad

$\Rightarrow p_0 \in P$, p_0 primo es maximal

Como esto es cierto para cualquier primo p_0 , en $(P, |)$ hay infinitos maximales.

Diagrama de Hasse:



Observamos que solo hay un elemento minimal

Def (Máximo y mínimo) Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $A \subseteq X$ no vacío. Decimos que:

- M es máximo de A si $\forall a \in A, a \leq M$.
- m es mínimo de A si $\forall a \in A, m \leq a$

↑
Implícitamente, nos dice que el máximo y el mínimo están relacionados con todos los

elementos de A . (Aunque el orden sea parcial)

Proposición $(X, \leq)$ conj. ordenado, $A \subseteq X$ no vacío. Si A tiene un máximo o un mínimo, es único.

DEM:

Sup. que A tiene dos máximos M_1 y M_2 .

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \text{ máximo} \Rightarrow M_2 \leq M_1 \\ M_2 \text{ máximo} \Rightarrow M_1 \leq M_2 \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2 \checkmark$$

↑ Antisimétrica

Igual pasa con el mínimo. 

Proposición (Relación entre maximales y máximos) Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si M es máximo de A , entonces M es maximal y es el único que hay.

DEM

• M máximo $\Rightarrow M$ maximal.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sup. que existe } a_0 \in A \text{ con } M \leq a_0 \\ M \text{ máximo} \Rightarrow \forall a \in A, a \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow M = a_0 \Rightarrow M \text{ maximal} =$$

↑ En particular $a_0 \leq M$

• No hay más elementos maximales en A .

Supongamos que M , que es el máximo, es maximal y que hay otro maximal M' M' maximal

$$\text{Como } M \text{ máximo} \Rightarrow M' \leq M \Rightarrow \underline{\underline{M' = M}} \quad \text{QED}$$

Proposición (Relación entre minimales y mínimo) Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Si m es mínimo de A , entonces m es minimal y es el único que hay.

DEM: Análoga a la anterior 

Conclusión

M máximo $\Rightarrow M$ es el único maximal

m mínimo $\Rightarrow m$ es el único minimal.

MAXIMALES Y MINIMALES: EJEMPLOS

Para los siguientes subconjuntos de los conjuntos ordenados que se indican abajo, si existen, los elementos maximales y minimales, el máximo y el mínimo.

a) En $(\mathbb{Z}^+, |)$ consideramos $X = \mathbb{Z}^+ - \{1\}$

Un elem. será minimal si no lo divide ningún otro entero más que él mismo. Esto lo cumplen los n°s primos. Así los elementos minimales son todos los n°s primos.

No hay un mínimo en $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$ porque ningún entero, salvo el 1, es divisor de todos los demás.

Sup. que $M \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ es maximal. Esto quiere decir que no divide a ningún otro entero salvo a sí mismo.

Pero $M|2M$, $M|3M$, ... $\Rightarrow$ No hay maximales.

Tampoco hay máximo porque no existe un entero al que dividan todos los demás.

b) En $(P(X), \subseteq)$ consideramos $P(X)$.

Tiene un máximo, X , que contiene a todos sus subconj. Además X también es maximal y no hay otros.

Tiene un mínimo, $\emptyset$, contenido en todos los subconjuntos de X . $\emptyset$ también es minimal y no hay otros.

c) En $(\mathbb{Z}^+, |)$ consideramos $X = 2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Claramente, 2 es el mínimo porque divide a todos los elementos de $2\mathbb{Z}^+$. También es el único minimal.

No hay maximales porque si $M \in 2\mathbb{Z}^+$ fuera maximal, no dividiría a ningún n^o par salvo a M mismo, pero

$$M | 2M \quad M | 4M \quad M | 6M \dots$$

Tampoco puede haber un máximo.

d) En $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ consideramos

$$X = \{S \in P(\mathbb{N}) : S \text{ infinito}\}$$

Como $\mathbb{N} \in X$ y $\mathbb{N}$ contiene cualquier subconjunto suyo, en particular a los de X , los contiene a todos

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \forall S \in X$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ es máximo y el único maximal.

Supongamos que $S \in X$ es un elemento minimal. Esto nos dice que no contiene otros elementos de X .

Pero como S es infinito, si elegimos $S_0 \in S$, tenemos que

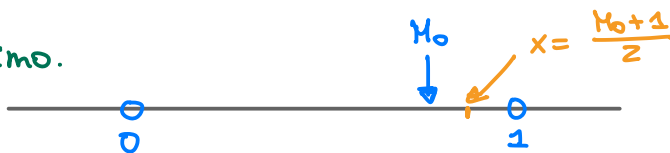
$$S - \{S_0\} \text{ infinito y } S - \{S_0\} \subseteq S$$

$\Rightarrow S$ no es minimal

$\Rightarrow X$ no tiene elem's minimales, ni mínimo.

COTAS. SUPREMO E ÍNFINO

Ej. Consideramos en $(\mathbb{R}, \leq)$ el intervalo $A = (0, 1)$. Proban que no tiene máximo.



Sup. que $M_0 \in (0, 1)$ es un máximo de A . Esto nos diría que $\forall x \in (0, 1)$, $x \leq M_0$. Sin embargo, si definimos

$$x = \frac{M_0 + 1}{2} \leftarrow \text{Punto medio de } M_0 \text{ y } 1$$

se tiene que $M_0 < x$. Por tanto, M_0 no es máximo.

Esto vale para cualquier $M_0 \in (0, 1)$

$\Rightarrow A = (0, 1)$ no tiene máximo

En el ejemplo anterior, parece que el "candidato natural" a máximo sería el 1, porque $x \leq 1 \forall x \in (0, 1)$ seguro. El "problema" es que $1 \notin (0, 1)$, sino que está "fuera".

Esto nos lleva a los conceptos de esta sección.

Df (Cotas de un subconjunto) Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

1.- Decimos que $S \in X$ es cota superior de A si $a \leq S \forall a \in A$.

2.- Decimos que $s \in X$ es cota inferior de A si $s \leq a, \forall a \in A$.

3.- Si el subconjunto A no tiene cotas, decimos que es no acotado en X .

! Las cotas de un subconjunto están en el conjunto "grande" X , y pueden estar o no en el subconjunto.

Ej. Consideramos en $(\mathbb{R}, \leq)$:

- $A = (0, 1)$

Ninguna está en A

Cotas superiores: $1, 3, \pi, 10^{23}$

Cotas inferiores: $0, -1, -e, -10^8$

- $B = [0, 1]$

Está en B
 No están en B.
Cotas superiores: $\textcircled{1}, 3, \pi, 10^{23}, \dots$

- $C = \mathbb{N}$

Cotas superiores: No está acotado superiormente

Cotas inferiores: $0, -1, -\frac{2}{3}, \dots$
 Está en $\mathbb{N}$ No están en $\mathbb{N}$

Def (Supremo e ínfimo) Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

1.- Si A está acotado superiormente en X , llamamos supremo de A , $\sup A$, al mínimo del conj. de las cotas superiores de A (si existe).

2.- Si A está acotado inferiormente en X , llamamos ínfimo de A , $\inf A$, al máximo del conj. de las cotas inferiores de A (si existe).

Ej Hallar el supremo y el ínfimo, si existen, en los siguientes casos:

a) En $(\mathbb{R}, \leq)$, $A = (0, 1)$.

Supremo. Vamos a ver que $\sup A = 1$.

Claramente, es cota superior $\checkmark$. Hay que ver que es la menor. Sup. que existe otra cota superior de A , $x_0 \in \mathbb{R}$, con $x_0 < 1$.

- Si $x_0 \leq 0$, no sería cota superior de A $\times$
- Necesariamente $x_0 \in (0, 1)$. Pero en este caso, tampoco

es cota superior de A porque el elemento

$$x = \frac{x_0 + 1}{2} \quad \leftarrow \text{Punto medio de } x_0 \text{ y } 1$$

cumple que $\underline{x_0} < x < 1$ y $x \in (0, 1)$

$\uparrow$ x_0 no es cota superior. (Contrad)

$$\Rightarrow \boxed{\sup A = 1}$$

Ínfimo De modo análogo se prueba que $\boxed{\inf A = 0}$

b) En $(D^*(36), |)$, $B = \{2, 3\}$

Recordemos cuando trabajamos con diagramas de Hasse:

En este caso, el orden es parcial

$$D^*(36) = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$$

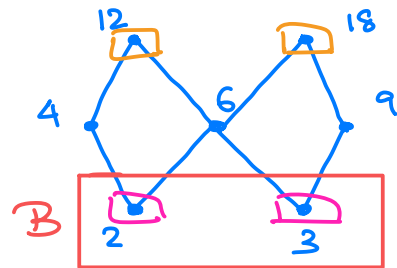
Supremo

¿Cotas superiores?

! Deben ser elem's de $D^*(36)$ que
estén relacionados con todos los
elem's de B y "por encima"

$$\Rightarrow \sup(B) = \{6, 12, 18\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup B = 6}$$



Ínfimo

¿Cotas inferiores?

Elem's de $D^*(36)$ relacionados con todos los de B y
"por debajo".

$\Rightarrow$ B no está acotado inferiormente en $D^*(36)$

$\Rightarrow$ No tiene ínfimo.

COTAS. SUPREMO E ÍNFIMO: PROPIEDADES

Prop. Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

- 1.- Si existe, $\sup A$ es único.
- 2.- Si A tiene máximo, entonces también tiene supremo y, de hecho, $\sup A = \max A$.
- 3.- $\sup A \in A \iff \sup A = \max A$.

DEM.

1.- Basta usar que, por definición, $\sup A$ es el mínimo del conj. de las cotas superiores de A y, como existe, el mínimo es único.

2.- Sea $M = \max A$. Veamos que $\sup A = M$:

- M es cota superior de A porque, por ser $\max$, $a \leq M \forall a \in A$.
- Supongamos que $M_0 \in X$ es otra cota superior de A , pero menor que M , $M_0 < M$. Por ser cota superior, $a \leq M_0 \forall a \in A$, en part., $M \leq M_0$ $\rightarrow M = M_0$
 $\rightarrow M$ es la menor cota superior de A
 $\Rightarrow M = \sup A$

3.- $\sup A \in A \iff \sup A = \max A$

$\Leftarrow$ $\sup A = \max A \in A$ $\leftarrow$ Por def. de $\max$.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\sup A \in A$. Tenemos que $\sup A$ es un elem. de A que cumple que $a \leq \sup A \forall a \in A$, que es justo la def. de máximo $\Rightarrow \sup A = \max A$.



Prop. Sea $(X, \leq)$ un conj. ordenado y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

1- Si existe, $\inf A$ es único.

2- Si A tiene mínimo, entonces también tiene ínfimo y de hecho, $\inf A = \min A$.

3- $\inf A \in A \iff \inf A = \min A$.

DEM: Análoga a la anterior.

EL CONJUNTO $(\mathbb{R}, \leq)$

Axioma (de completitud o del supremo en $\mathbb{R}$). Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

Si X está acotado superiormente, entonces tiene supremo.

⚠ Es un axioma de construcción de $\mathbb{R}$, no una proposición deducible de otros axiomas.

Prop (del ínfimo en $\mathbb{R}$) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Si X está acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo.

DEM

Definimos el conjunto

$$X' = \{-x : x \in X\}$$

↙ x' son los elem's de X , pero cambiados de signo.

Como $X \neq \emptyset \rightarrow X' \neq \emptyset$.

X acotado inferiormente $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 \leq x \ \forall x \in X$.

$$\stackrel{\bullet (-1)}{\Rightarrow} (-x_0) \geq \underbrace{(-x)}_{x'} \ \forall x \in X$$

$$\Rightarrow (-x_0) \geq x' \ \forall x' \in X'$$

$\Rightarrow X'$ es un subconj. de $\mathbb{R}$ acotado superiormente

Ax. Compl.

$\Rightarrow X'$ tiene un supremo, a saber $s' = \sup X'$

Veamos que $(-s')$ es ínfimo de X :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad s' = \sup x' &\Rightarrow s' \geq x' \quad \forall x' \in X' \\
 &\Rightarrow s' \geq (-x) \quad \forall x \in X \\
 &\stackrel{\bullet(-1)}{\Rightarrow} (-s') \leq x \quad \forall x \in X
 \end{aligned}$$

Falta ver que es la mayor cota inf.

$\Rightarrow -s'$ es cota inferior de X .

- Supongamos que hay una cota inferior mayor que $-s'$, a saber, s_0 :

$$\begin{aligned}
 -s' \leq \underbrace{s_0}_{\substack{\uparrow \text{ Por ser } s_0 \\ \text{cota inf. de } X}} \leq x \quad \forall x \in X &\stackrel{\bullet(-1)}{\Rightarrow} s' \geq -s_0 \geq -x \quad \forall x \in X \\
 &\Rightarrow \underbrace{s' \geq -s_0}_{\substack{\uparrow \\ -s_0 \text{ es una cota superior de } x' \text{ menor que } s'}} \geq x' \quad \forall x' \in X'
 \end{aligned}$$

¡CONTRADICCIÓN!

¡ s' es el supremo de X' !

$\Rightarrow -s'$ es la mayor cota inferior de X'

$\Rightarrow x'$ tiene ínfimo ✓ 

Prop $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente.

DEM:

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$
Ax. Compl.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ tiene un supremo, a saber $s_0 \in \mathbb{R}$.

Pero como s_0 es supremo, $s_0 - 1$ no puede serlo, lo que nos dice que existe $n \in \mathbb{N}$ con

$$s_0 - 1 < \underbrace{n}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}} \Rightarrow \underbrace{s_0}_{\substack{\uparrow \\ \sup \mathbb{N}}} < \underbrace{n+1}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}$$

¡Contradicción! 

PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DE $\mathbb{R}$

Lema. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

DEM. Supongamos que no: $n < x \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Pero esto nos diría que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ y

no es así (¡contad!)



Teorema (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$nx > y.$$

DEM: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$

$$nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$$

Pero como $y/x \in \mathbb{R}$, el Lema anterior nos asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > y/x \Rightarrow nx > y$ ✓

Corolario Para $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $x > \frac{1}{n}$.

DEM:

Por la Prop. Arquim., si $x > 0$ con $x, y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Tomando $y = 1$,

$$nx > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{n}. \checkmark$$



↑ Todo n° real positivo es mayor que $\frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$
(por muy pequeño que sea el n° real!!)

DENSIDAD DE $\mathbb{Q}$ EN $\mathbb{R}$

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$,
existe $q \in \mathbb{Q}$ con
$$x < q < y.$$

↑ Entre dos n° reales hay siempre un n° racional.

¡Por muy cerca que estén x e y !

DEM.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > x$.

$$y > x \Rightarrow \underbrace{y - x}_{\in \mathbb{R}} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } y - x > \frac{1}{n}$$

Corolario
de la Prop
Arquimediana

$$\Rightarrow n(y-x) > 1 \Rightarrow ny - nx > 1$$

↙ Entre ny y nx hay más de una unidad de 'distancia'

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ con } nx < p < ny$$

$$\Rightarrow x < \underbrace{\frac{p}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y \quad \checkmark$$



COTAS. SUPREMOS E ÍNFIMOS: EJEMPLOS

Ej Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $(\mathbb{R}, \leq)$.

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Obs: $n \geq 1 \xRightarrow{:n} 1 \geq \frac{1}{n}$ y, de hecho, se da la igualdad para $n=1$. Esto nos dice que

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

→ A está acotado superior e inferiormente

⇒ A tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$.

Supremo 1 es una cota superior y además está en A (para $n=1$)

$$\Rightarrow \max A = 1 \Rightarrow \sup A = 1.$$

Ínfimo Veamos que $\inf A = 0$.

- 0 es cota inferior porque $0 < \frac{1}{n}$
- Sup. que hay otra cota inferior $x_0 \in \mathbb{R}$ mayor que 0 ✗
 $\Rightarrow 0 < x_0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero como $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, el Corolario de la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ nos asegura que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$x_0 > \frac{1}{n_0} > 0. \quad \text{¡Contradicción!}$$

$$\Rightarrow \inf A = 0.$$

b) $B = \{q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2}\}$

Podemos escribir $B = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

Ínfimo Como B no está acotado inferiormente, no puede haber ni ínfimo, ni mínimo.

Supremo Veamos que $\sup B = \sqrt{2}$.

- Claramente, por definición de B , $\sqrt{2}$ es cota superior.
- Supongamos que hay otra cota superior, $x_0 \in \mathbb{R}$, menor que $\sqrt{2}$, esto es

$$\underbrace{q < x_0 < \sqrt{2}}_{\text{Para todo } q \in B} \quad (*)$$

Pero por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ aplicada en $(*)$, sabemos

que existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ con $x_0 < \underbrace{q_0 < \sqrt{2}}_{q_0 \in B}$

$\Rightarrow x_0$ no es cota superior de B ¡contradictorio!

$$\Rightarrow \sup B = \sqrt{2}.$$

Además, B no tiene máximo porque si lo tuviera debería coincidir con el supremo y $\sqrt{2} \notin B$ por no ser racional.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \leq 0\}$

Resolviendo la ecuación

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$\rightarrow C = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

Supremo $\sup C = 1 = \max C$

Ínfimo No existe por no estar C acotado inferiormente en $\mathbb{R}$.

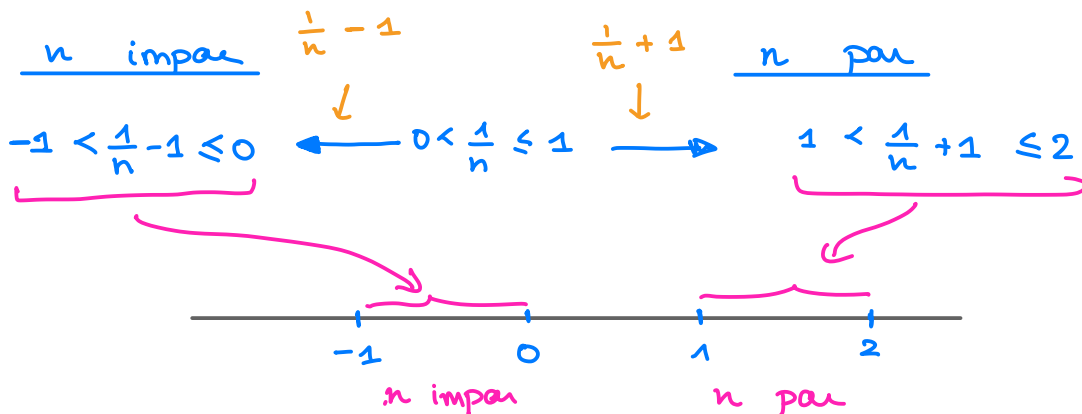
d) $D = \left\{ \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{⊗}} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}_{\text{"Cómo funciona" esto}} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

n	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$
1	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
3	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = -1$
4	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \dots$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} -1, & n \text{ impar.} \\ 1, & n \text{ par.} \end{cases}$$

⊗ Además, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ y $\frac{1}{n}$ es decreciente y tiende a 0

Distinguimos dos tipos de elementos:



En cualquier caso, D está acotado inferiormente por -1 y superiormente por 2 .

$\Rightarrow D$ tiene supremo e ínfimo.

Supremo Lo buscamos "cerca" de los términos pares:

términos con n par



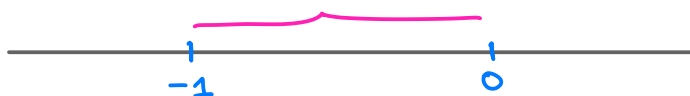
El primer término es para $n=2 \rightarrow \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Como $\frac{1}{n}$ es decreciente, $\frac{1}{n} + 1$ también lo es, por lo que $\frac{3}{2}$ es el mayor n.º real de D .

$$\Rightarrow \max D = \frac{3}{2} = \sup D.$$

Ínfimo Lo buscamos "cerca" de los términos impares.

términos con n impar



Veamos que $\inf D = -1$:

- -1 es cota inferior porque $-1 < \frac{1}{n} - 1 \leq 0$, según hemos visto para n impar antes.
- Supongamos que hay otra cota inferior $x_0 \in \mathbb{R}$ mayor que -1 :

$$-1 < x_0 \leq \frac{1}{n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto es equivalente, sumando 1 a que

$$0 < x_0 + 1 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corolario de la Prop. Arquimediada

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n_0} < x_0 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_0} - 1 < x_0$ ¡Contrad!!

Hay al menos un n.º natural para el

que se cumple esto

$\Rightarrow x_0$ no es cota inferior

$\Rightarrow \inf D = -1$.

Además, D no tiene mínimo, porque si lo tuviere, debería ser -1 , por lo que para algún n impar,

$$\frac{1}{n} - 1 = -1 \rightarrow \frac{1}{n} = 0 \quad \underline{\underline{\text{imposible.}}}$$

COTAS. SUPREMOS E ÍNFIMOS: EJEMPLOS

Ej Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo:

a) En $(P(\underbrace{\{1,2,3\}}_X), \subseteq)$, $A = \{\{1\}, \{2\}\}$.

Supremo

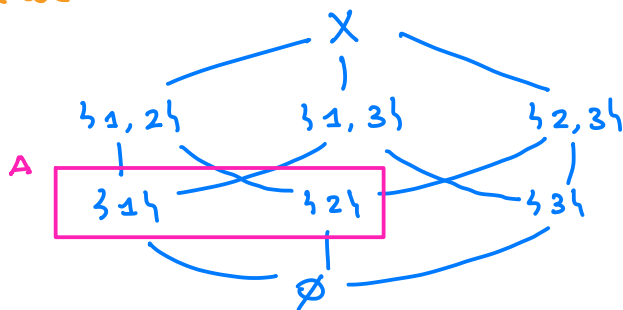
Menor cota superior
↓

Cotas superiores $\{1,2\}$ y X

$$\Rightarrow \sup A = \{1,2\}.$$

A no tiene máximo porque si lo tuviera coincidiera con el supremo, pero $\{1,2\} \notin A$.

Diagrama de Hasse de $(P(X), \subseteq)$



Ínfimo: $\emptyset$ es la única cota inferior $\Rightarrow \inf A = \emptyset$

A tampoco tiene mínimo porque $\emptyset \notin A$.

b) En $(\mathbb{Q}, \leq)$, $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$

↑ Buscamos sup e inf en $\mathbb{Q}$, no en $\mathbb{R}$.

Resolvemos la inequación

$$q^2 < 2 \rightarrow q^2 = 2 \rightarrow q = \pm \sqrt{2}$$

↖ No está en $\mathbb{Q}$



$$\Rightarrow \text{Podemos escribir } B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

Supremo

B está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ porque, por ej., $2 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior. Buscamos la menor de todas, a saber, $q_0 \in \mathbb{Q}$.

• Si $q_0 > \sqrt{2}$, como $q_0 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q' \in \mathbb{Q}$ con

$$q_0 > q' > \sqrt{2}$$

→ q' sería una cota superior de B , menor que q_0 , por lo que q_0 no puede ser mayor que $\sqrt{2}$.

• Si $q_0 < \sqrt{2}$, por ser q_0 cota superior de B , tenemos que

$$q \leq q_0 < \sqrt{2} \quad \forall q \in B.$$

Pero, de nuevo por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $q'' \in \mathbb{Q}$ con

$$q_0 < q'' < \sqrt{2} \rightarrow (q'')^2 < 2 \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$

⇒ $q'' \in B \Rightarrow q_0$ no puede ser cota superior si es menor que $\sqrt{2}$.

Conclusión: q_0 (el supuesto supremo) no puede ser mayor que $\sqrt{2}$, pero tampoco menor.

⇒ B no tiene supremo,,

¿¿No contradice esto el Axioma del Supremo??

No porque B es un subconjunto de $(\mathbb{Q}, \leq)$, no de $(\mathbb{R}, \leq)$

Como B no tiene supremo, tampoco tiene máximo.

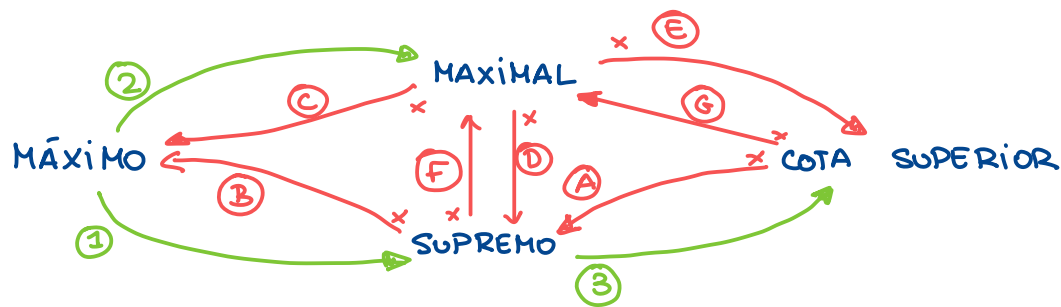
Un razonamiento análogo, demuestra que B no tiene

ínfimo, ni mínimo.

Obs Acabamos de ver un subconjunto de un conjunto ordenado que está acotado superior e inferiormente, pero no tiene supremo ni infimo

$$\text{En } (\mathbb{Q}, \leq), \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}.$$

RELACIÓN ENTRE MÁXIMO, MAXIMAL, SUPREMO Y COTA SUPERIOR



$A \rightarrow B$: Si un elem es A también es B.

$A \nrightarrow B$: Si un elem es A no tiene por qué ser B (CONTRA EJEMPLOS)

- ① Demostremos que si $M = \max A \Rightarrow \sup A$ existe
y $\sup A = \max A$.
- ② Demostremos que si un elem es máximo, es el único maximal.
- ③ Por def, el supremo es la menor cota superior.
- Ⓐ En $(\mathbb{R}, \leq)$, $A = (0, 1)$. El 2 es cota superior, pero no es el supremo porque hay cotas superiores inferiores.
Ⓒ tampoco es maximal porque no está en A.
- Ⓑ En $(\mathbb{R}, \leq)$, $A = (0, 1)$, se tiene que $\sup A = 1$, pero A no tiene máximo.
- Ⓒ En $(\mathbb{D}^*(36), |)$, hay dos elem's maximales: 12 y 18. Pero no son máximos de $\mathbb{D}^*(36)$ porque ninguno está relacionado con todos los elem's del conjunto.
- Ⓓ En $(\mathbb{D}^*(36), |)$, $B = \{12, 18\}$. Tanto 12 como 18 son elem's maximales de B, pero ninguno es el supremo porque no están relacionados entre ellos y, además, B no está acotado superiormente en $\mathbb{D}^*(36)$. Ⓔ
- Ⓕ En $(\mathbb{R}, \leq)$, $A = (0, 1)$, $\sup A = 1$, pero no es maximal porque no pertenece a A.

