

RELACIONES BINARIAS

IDEA: Una relación binaria en un conjunto asocia parejas de elementos entre los que existe esa relación

Ej: En el conjunto de los seres humanos, H , definimos la relación R entre dos personas si son hermanos.

Si 'Fernando' y 'Nerea' son hermanos están relacionados y escribimos

$$(Fernando, Nerea) \in R \quad \text{o} \quad Fernando R Nerea$$

$$(Nerea, Fernando) \in R \quad \text{o} \quad Nerea R Fernando.$$

Podría ser que una relación asocie dos elementos en un sentido, pero no en el otro.

Df (Relación binaria) Sea X un conjunto no vacío. Una relación binaria en X , R , es un subconjunto de $X \times X$, $R \subseteq X \times X$; de modo que $(x_1, x_2) \in R$ si x_1 está relacionado con x_2 .

Notación: $(x_1, x_2) \in R$ también se escribe $x_1 R x_2$.

Ej: Consideramos en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación de divisibilidad:

$$m R n \stackrel{\text{def}}{\iff} m \text{ divide a } n$$

↓ Notación

$$m | n$$

Por ej, $2 R 8$ porque $2 | 8$; pero $8 \not R 2$ porque $8 \nmid 2$.

Ej: En $\mathbb{R}$ definimos la relación "menor que"

$$x R y \stackrel{\text{def}}{\iff} x < y$$

Por ej, $\pi R \pi^2$ porque $\pi < \pi^2$, pero $\pi^2 \not R \pi$ porque $\pi^2 > \pi$.

$0 \not R 0$ porque 0 no es menor que sí mismo.

Ej: En $\mathbb{R}$ definimos:

$$x R y \stackrel{\text{def}}{(\Leftrightarrow)} x + y = \pi$$

Por ej,

$0 R \pi$ porque $0 + \pi = \pi$; y también $\pi R 0$ porque $\pi + 0 = \pi$.

$1 R (\pi - 1)$ porque $1 + (\pi - 1) = \pi$

$a R (\pi - a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ porque $a + (\pi - a) = \pi$.

Ej: En $\mathbb{Q}$ definimos

$$\frac{a}{b} R \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{(\Leftrightarrow)} a \cdot d = b \cdot c$$

! Esta relación nos asocia todas las fracciones equivalentes

Por ej,

$$\frac{2}{4} R \frac{1}{2} \text{ porque } 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$$

$$\frac{2}{3} \not R \frac{7}{5} \text{ porque } 2 \cdot 5 \neq 3 \cdot 7.$$

Hay dos tipos de relaciones binarias muy importantes:

- Relaciones de equivalencia.
- Relaciones de orden.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Df (Relación de equivalencia) Sea X un conjunto y R una relación binaria definida en él. Decimos que R es una relación de equivalencia si cumple tres propiedades:

(i) Reflexiva. $x R x$ para todo $x \in X$.

(ii) Simétrica $x R y \Rightarrow y R x$ para todo $x, y \in X$.

(iii) Transitiva $x R y, y R z \Rightarrow x R z$ para todo $x, y, z \in X$.

Ej Definimos el subconjunto de $\mathbb{Z}$:

$$3\mathbb{Z} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$$

↑ Múltiplos de 3: $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

Sea en $\mathbb{Z}$ la relación:

$$mRn \stackrel{\text{def}}{\iff} \boxed{m-n \in 3\mathbb{Z}} \leftarrow "m-n \text{ es múltiplo de 3}."$$

Demostremos que R es de equivalencia.

(i) Reflexiva $m \in \mathbb{Z}$

$$m-m=0=3 \cdot 0 \Rightarrow m-m \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow mRm \checkmark$$

(ii) Simétrica $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} mRn &\Rightarrow m-n \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow m-n = 3 \cdot k && \text{múltiplo de 3} \\ &\stackrel{\cdot (-1)}{\Rightarrow} (-1) \cdot (m-n) = (-1) \cdot 3 \cdot k \Rightarrow n-m = \underbrace{3 \cdot (-k)}_{\downarrow} \in 3\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow nRm \checkmark \end{aligned}$$

(iii) Transitiva $m, n, p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} mRn &\Rightarrow m-n \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow m-n = 3k \\ nRp &\Rightarrow n-p \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow n-p = 3k' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} mRn &\Rightarrow m-n \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow m-n = 3k \\ nRp &\Rightarrow n-p \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow n-p = 3k' \end{aligned}} \right\} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \cancel{m-n} + \cancel{n-p} = 3k + 3k' \Rightarrow m-p = \underbrace{3(k+k')}_{\substack{\text{Múlt. de 3} \\ \downarrow}} \in 3\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow mRp \checkmark$$

Conclusión: R es de equivalencia en $\mathbb{Z}$ 😊

Df (Clase de equivalencia) Sea X un conjunto, R una rel. de equiv. en X y sea $x_0 \in X$. La clase de equivalencia de x_0 es el subconjunto de X formado por todos los elementos relacionados con x_0 por R .

$$\underbrace{[x_0]}_{\substack{\text{Clase de equivalencia} \\ \text{de } x_0}} = \{x \in X : xRx_0\}$$

Clase de equivalencia
de x_0

Obs: $[x_0] \neq \emptyset$ porque, por la propiedad reflexiva,

$$x_0 R x_0 \leadsto x_0 \in [x_0].$$

Ej: Hallar las clases de equivalencia de 0, 1 y 2 de la relación del ejemplo anterior. En $\mathbb{Z}$

$$m R n \stackrel{\text{def}}{\iff} m - n \in 3\mathbb{Z}.$$

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n R 0\} = \{n \in \mathbb{Z} : \overbrace{n-0}^n \in 3\mathbb{Z}\} = \underbrace{\{n \in \mathbb{Z} : n \in 3\mathbb{Z}\}}_{\text{Múltiplos de 3}}$$

$$\Rightarrow [0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = 3\mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} [1] &= \{n \in \mathbb{Z} : n R 1\} = \{n \in \mathbb{Z} : \overbrace{n-1}^{n-1 \text{ es múlt. de 3}} \in 3\mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n-1 = 3K \text{ para } K \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : \underbrace{n = 3K+1}_{\substack{\uparrow \\ \text{Si dividimos } n \text{ entre } 3, \text{ da resto } 1}} \text{ para } K \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$\begin{array}{r} n \quad \overline{) 3} \\ 1 \quad \overline{) K} \\ \hline n = 3K+1 \end{array}$

$$\Rightarrow [1] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ da resto 1 al dividir por 3}\}$$

$$\uparrow \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$\begin{aligned} [2] &= \{n \in \mathbb{Z} : n R 2\} = \{n \in \mathbb{Z} : \overbrace{n-2}^{n-2 \text{ es múlt. de 3}} \in 3\mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n-2 = 3K \text{ para } K \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : \underbrace{n = 3K+2}_{\substack{\uparrow \\ n \text{ deja resto 2 al dividir por 3}}} \text{ para } K \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [2] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ deja resto 2 al dividir por 3}\}$$

$$\uparrow \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

Proposición (Propiedades de las clases de equivalencia)

Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia en X .

Sean $x_1, x_2 \in X$.

1) $x_1 R x_2 \Leftrightarrow [x_1] = [x_2]$

Dos elem's están relacionados, sii, sus clases de equiv. son iguales.

2) Si $x_1 \not R x_2 \Rightarrow [x_1] \cap [x_2] = \emptyset$

Si dos elem's no están relacionados, sus clases de equiv. no tienen elem's en común

3) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$

$\uparrow$ X es la unión de todas las clases de equiv. posibles de los elem's de X .

DEM.

1) $\Rightarrow$ $x_1 R x_2 \Rightarrow [x_1] = [x_2]$

$[x_1] \subseteq [x_2]$

Tomamos $x \in [x_1] \Rightarrow x R x_1$ $\left. \begin{array}{l} \text{Transitiva} \\ * \Rightarrow x_1 R x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x R x_2 \Rightarrow x \in [x_2] \checkmark$

$[x_2] \subseteq [x_1]$ Exactamente igual $\checkmark$

$\Leftarrow$ $[x_1] = [x_2] \Rightarrow x_1 R x_2$

$x_1 \in [x_1] = [x_2] \Rightarrow x_1 R x_2 \checkmark$

$\uparrow$ Por la reflexiva $x_1 R x_1$

2) Si $x_1 \not R x_2 \Rightarrow [x_1] \cap [x_2] = \emptyset \checkmark$

Simétrica

Reducción al absurdo: $x_1 \not R x_2$, pero $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$

$x \in [x_1] \cap [x_2] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [x_1] \rightarrow x R x_1 \rightarrow x_1 R x \\ x \in [x_2] \rightarrow x R x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$

Transitiva
 $\Rightarrow x_1 R x_2$ ¡Contradicción!

3) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ $\leftarrow$ Igualdad de conjuntos.

$X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$ $x \in X \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in X} [x] \checkmark$

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$$

$$\text{Cada } [x] \subseteq X \Rightarrow \bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X \checkmark$$

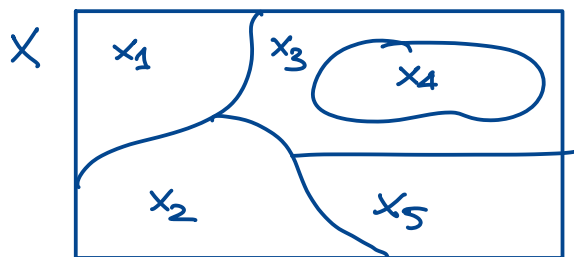


Df (Partición de un conjunto) Sea X un conjunto no vacío y sean $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq X$ subconjuntos no vacíos. Decimos que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es una partición de X si:

1.- $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ $\leftarrow$ La unión de todos, $X_1, \dots, X_n$, es todo X

2.- $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$ $\leftarrow$ X_i y X_j no tienen elem's en común.

IDEA: Una partición separa en cajones los elementos de X de modo que todos los elementos están en algún cajón (1-) y solo en uno (2.-)



Obs: Una partición puede tener infinitos "cajones".

Obs 2: Las clases de equiv. de una relación R en X forman una partición de X : una rel. de equiv. hace "cajones" en un conjunto, clasifica los elementos.

Df (Representante de una clase de equivalencia) Sea X un conj y R una rel. de equiv. en X . Dado $x \in X$, un representante de la clase de x es cualquier elem de $[x]$.

Ej En nuestro ejemplo de $3\mathbb{Z}$, tenemos

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

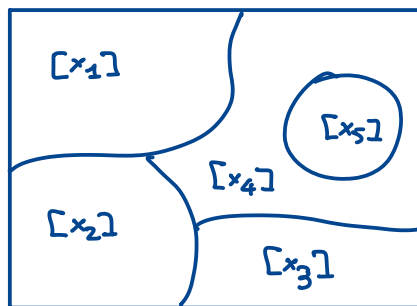
Podemos elegir como representante de $[0]$ a cualquier elem. suyo:

$$\underline{[0] = [3] = [6] \dots}$$

Se suele establecer un criterio para elegir representante. Por ej, en el ejemplo anterior, tomar el menor entero no nulo como representante. $\rightarrow [0], [1], [2]$.

CONJUNTO COCIENTE

IDEA: Una rel. de equiv. R define una partición en X :



Cada clase de equiv. distinta es un "cajón"

El conjunto cociente tiene por elementos los cajones.

$$\{[x_1], \dots, [x_5]\}.$$

No "ve" los elem's que hay dentro.

Df (Conjunto cociente) Sea X un conjunto y sea R una rel. de equivalencia definida en él. El conjunto cociente es el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia.

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

Conjunto cociente de X por la rel. R

Ej. Hallar el conjunto cociente de la relación del ejemplo anterior. En $\mathbb{Z}$

$$mRn \stackrel{df}{\iff} m-n \in 3\mathbb{Z}.$$

Habíamos hallado las clases de equivalencia de algunos elementos:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ múltiplo de } 3\}$$

$$[1] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ deja resto } 1 \text{ al dividirlo por } 3\}$$

$$[2] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ deja resto } 2 \text{ al dividirlo por } 3\}.$$

¿Hay más clases?

¡No! Porque todo n^o entero es de la forma

$$\underbrace{n=3k}_{[0]} \quad \text{o} \quad \underbrace{n=3k+1}_{[1]} \quad \text{o} \quad \underbrace{n=3k+2}_{[2]}$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$ debe estar en $[0]$, o en $[1]$, o en $[2]$.

Por tanto

$$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2]\}.$$

Notación: El cociente anterior se escribe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y se llaman enteros módulo 3.

Dificultad a la hora de calcular X/R : Saber cuándo hemos encontrado todas las clases de equivalencia. Esto ocurre cuando hemos "clarificado" todos los elementos de X , es decir, todo $x \in X$ está en una clase de equivalencia.

EJEMPLO: LOS ENTEROS MÓDULO n , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Consideramos $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, fijo y definimos en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación: para $p, q \in \mathbb{Z}$, ┌ Esto lo hicimos para

$$p R q \stackrel{\text{del}}{\iff} p - q \in n\mathbb{Z}, \quad \text{3Z. Vamos a}$$

donde $n\mathbb{Z} = \{ \text{Enteros múltiplos de } n \}$ └ generalizando

Así definida, R es de equivalencia en $\mathbb{Z}$:

(i) Reflexiva $p - p = 0 = 0 \cdot n \in n\mathbb{Z} \Rightarrow p R p \checkmark$

(ii) Simétrica $p R q \Rightarrow p - q \in n\mathbb{Z} \Rightarrow p - q = kn \text{ para } k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \stackrel{\cdot(-1)}{q - p} = \underbrace{n \cdot (-k)}_{\text{Múlt. de } n} \in n\mathbb{Z} \Rightarrow q R p \checkmark$

(iii) Transitiva

$$\begin{aligned} p R q &\Rightarrow p - q = kn \\ q R t &\Rightarrow q - t = k'n \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} p - \cancel{q} + \cancel{q} - t = kn + k'n$$
$$\Rightarrow p - t = \underbrace{n(k+k')}_{\text{Múlt de } n} \in n\mathbb{Z} \Rightarrow p R t \checkmark$$

Clases de equivalencia

$$\boxed{[0]}$$

$$\begin{aligned} [0] &= \{ p \in \mathbb{Z} : p R 0 \} = \{ p \in \mathbb{Z} : p - 0 \in n\mathbb{Z} \} \\ &= \{ p \in \mathbb{Z} : p \text{ es múltiplo de } n \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{[1]} &= \{ p \in \mathbb{Z} : p R 1 \} = \{ p \in \mathbb{Z} : p - 1 \in n\mathbb{Z} \} \quad \begin{array}{l} p \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} n \\ k \end{array} \\ &= \{ p \in \mathbb{Z} : p - 1 = kn \} = \{ p \in \mathbb{Z} : p = kn + 1 \} \\ &= \{ p \in \mathbb{Z} : p \text{ deja resto } 1 \text{ al dividirlo por } n \} \end{aligned}$$

Igual
 $\downarrow$
 $[2] = \{ p \in \mathbb{Z} : p \text{ deja resto } 2 \text{ al dividirlo por } n \}$

(?) ¿cuántas clases distintas hay?

Tantas como posibles restos al dividir por n ...

Al dividir por n podemos obtener resto $0, 1, 2, \dots$ hasta $n-1$
 ¡Esto nos da las clases!

$$[a] = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ deja resto } a \text{ al dividirlo por } n\}$$

$$\uparrow a = 0, 1, \dots, n-1.$$

El conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

Notación: Al conjunto anterior se le llama "Enteros módulo n "
 y se denota por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

EJEMPLO: CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{Q}$ A PARTIR DE $\mathbb{Z}$

Consideramos en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ la siguiente relación: para
 $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$,

$$(m, n) R (p, q) \stackrel{\text{def}}{\iff} m \cdot q = n \cdot p.$$

Así definida, R es de equivalencia:

(i) Reflexiva. $(m, n) R (m, n) \iff m \cdot n = n \cdot m \checkmark$

(ii) Simétrica. $(m, n) R (p, q) \Rightarrow m \cdot q = n \cdot p \Rightarrow p \cdot n = q \cdot m \Rightarrow (p, q) R (m, n) \checkmark$

(iii) Transitiva

$$\begin{aligned} (m, n) R (p, q) &\Rightarrow m \cdot q = n \cdot p \xrightarrow{\cdot s \neq 0} m \cdot q \cdot s = n \cdot p \cdot s \\ (p, q) R (r, s) &\Rightarrow p \cdot s = q \cdot r \xrightarrow{\cdot n \neq 0} n \cdot p \cdot s = n \cdot q \cdot r \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (m, n) R (p, q) \\ (p, q) R (r, s) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot q \cdot s = n \cdot q \cdot r \xrightarrow{:q \neq 0} m \cdot s = n \cdot r \Rightarrow (m, n) R (r, s) \checkmark$$

$\Rightarrow R$ es de equivalencia.

Clases de equivalencia.

En lugar de escribir $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, escribimos

$$\frac{m}{n} \text{ con } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left[\frac{m}{n} \right] &= [(m,n)] = \{ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} : mq = np \} \\ &= \left\{ \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\} : \underbrace{mq}_{\frac{m}{n} \times q} = \underbrace{np}_{q \times p} \right\} \end{aligned}$$

¡Esto es la condición de que dos fracciones sean equivalentes!

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{m}{n} \right] = \left\{ \frac{p}{q} : \frac{p}{q} \text{ es equivalente a } \frac{m}{n} \right\}.}$$

"es como"

Conjunto cociente

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / \sim = \left\{ \left[\frac{m}{n} \right] : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \cong \mathbb{Q}$$

Hemos construido $\mathbb{Q}$ a partir de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. 😊

FUNCIONES DEFINIDAS EN CONJUNTOS COCIENTES

Vamos a ~~tratar~~ funciones en las que el conj. de salida o el conj. de llegada es un cociente.

- El conj. de llegada es un cociente.

Solo hay que entender la función y trabajar con ella.

Hay una función especial.

Def (Función de paso al cociente) Sea X un conjunto y sea R una relación de equivalencia en X . La función de paso al

cociente es:

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/R \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Se suele denotar con π

La función de paso al cociente siempre es sobreyectiva.

Def: Tomamos $[x] \in X/R$. Sabemos que $[x] \neq \emptyset$, por lo que existe $x_0 \in [x]$. Afirmamos que $p(x_0) = [x]$:

$$\begin{aligned} \text{Def} \Rightarrow p(x_0) &= [x_0] \\ x_0 R x &\Rightarrow [x_0] = [x] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Def} \Rightarrow p(x_0) &= [x_0] \\ x_0 R x &\Rightarrow [x_0] = [x] \end{aligned}} \right\} \Rightarrow p(x_0) = [x] \quad \checkmark$$

$$\text{Ej} \quad p: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}; \quad p(m) = [m]$$

Es la aplicación de paso al cociente de $\mathbb{Z}$ a los enteros módulo 3

- El conj. de salida es un cociente.

Supongamos que trabajamos con $p: X/R \longrightarrow Y$.

Como los elementos de X/R son clases de equivalencia y estas pueden tener representantes distintos, hay que asegurarse de que la función está bien definida, esto es, que la imagen de una clase no depende del representante que elijamos para la misma.

$$\boxed{\text{Si } [x_1] = [x_2] \text{ en } X/R \Rightarrow p([x_1]) = p([x_2]) \text{ en } Y}$$

Ej Decidir si están bien definidas:

$$a) \quad p: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad p([m]) = m$$

Veamos que no está bien definida.

Tomamos $[0] = [3]$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$$p([0]) = 0 \quad p([3]) = 3$$

↗ ↖
≠

b) $p: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad p([m]) = \cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right)$

Tomamos $[m_1] = [m_2]$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\rightarrow m_1 R m_2 \rightarrow m_1 - m_2 = 3K \rightarrow m_1 = 3K + m_2$$

¿ $p([m_1]) = p([m_2])$?

$$p([m_1]) = \cos\left(\frac{2\pi m_1}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi (3K + m_2)}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3K + 2\pi m_2}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3K}{3} + \frac{2\pi m_2}{3}\right)$$

Ángulo α ↖ ↗ $= \cos\left(\frac{2\pi m_2}{3} + 2K\pi\right)$ K vueltas completas

$$= \cos\left(\frac{2\pi m_2}{3}\right) = p([m_2])$$

$\Rightarrow p$ está bien definida ✓

Ej. Consideremos

$$p: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$[m]_4 \mapsto [m]_2$$

a) Probar que p está bien definida

Tomamos $[m_1]_4 = [m_2]_4$ en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\rightarrow m_1 - m_2 = 4K \rightarrow m_1 - m_2 = 2 \cdot (2K) \in 2\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow [m_1]_2 = [m_2]_2 \Rightarrow p([m_1]_4) = p([m_2]_4)$$

$\Rightarrow p$ bien definida ✓

b) p es sobreyectiva

Tomemos $[m]_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Como $[m]_2 \neq 0$, existe $m_0 \in [m]_2$

y, de hecho, $[m_0]_2 = [m]_2$.

Vamos a calcular $f([m]_4)$

$$f(\underline{[m]_4}) = \underline{[m]_2} = \underline{[m]_2} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva.}$$

c) f no es inyectiva.

Tomemos $[0]_4, [2]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\boxed{[0]_4 \neq [2]_4} \text{ porque } 0 \not\equiv 2 \rightarrow 0-2 = -2 \notin 4\mathbb{Z}.$$

$$\left. \begin{array}{l} f([0]_4) = [0]_2 \\ f([2]_4) = [2]_2 \end{array} \right\} \rightarrow [0]_2 = [2]_2 \text{ porque } 0-2 = -2 \in 2\mathbb{Z}$$

Dos elem's distintos tienen la misma imagen

$\Rightarrow f$ no es inyectiva.
