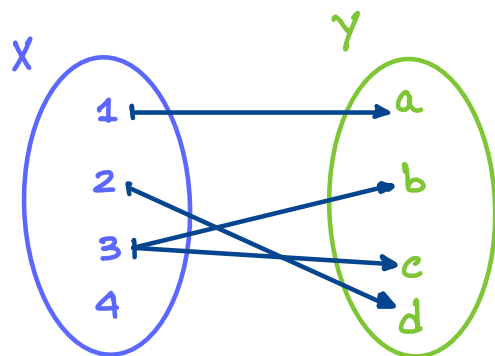


FUNCIONES

Df (Correspondencia) Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia entre X e Y es una regla que asigna a elementos de X , elementos de Y .

Idea:



Notación: asignación

$1 \mapsto a$

$2 \mapsto d$

$3 \mapsto b$

$3 \mapsto c$

Una correspondencia se expresa mediante un subconjunto del producto cartesiano, $C \subseteq X \times Y$. La anterior sería

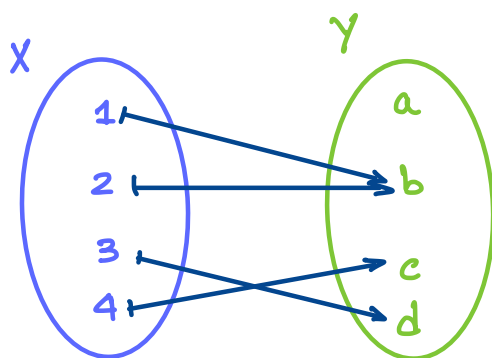
$$C = \{(1, a), (2, d), (3, b), (3, c)\}$$

¡No es función!

Df (Función o aplicación) Una función entre dos conjuntos no vacíos X e Y es una correspondencia, $C \subseteq X \times Y$, en la que a cada elem. de X se le asigna, como mucho, un elem de Y ; esto es,

$$(x, y), (x, y') \in C \Rightarrow y = y'.$$

Ej:



$$C = \{(1, b), (2, b), (3, d), (4, c)\}$$

¡Sí es una función!

Sí se puede asignar el mismo elem de Y a dos elem. distintos de X .

Notación: Una función entre X e Y se designa con una letra minúscula: $f, g, h, \dots$ y se escribe

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

A X se le llama conj. de salida, y a Y , conj. de llegada.

Ej ¿Son funciones?

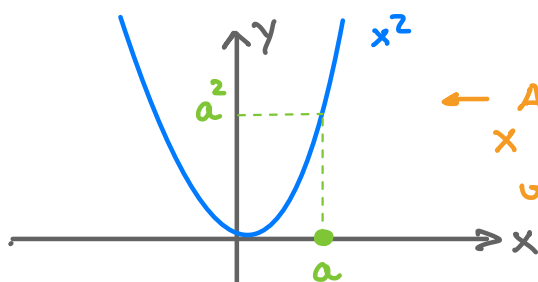
También:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Regla de asignación
En qué conjuntos está definida la función

f es una función porque a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su cuadrado, $x^2 \in \mathbb{R}$, y éste es único.

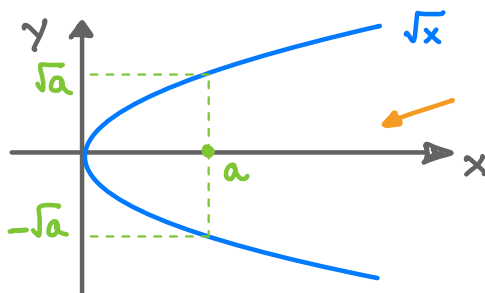


← A cada punto del eje x le corresponde solo una "altura"

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = \pm \sqrt{x}$

¡Dos valores!

No es una función porque, por ej, $g(2) = \pm \sqrt{2}$



Hay puntos en el eje x con más de una "altura" asignada.

c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad h(m) = 2m - 1$

Es una función porque a cada $m \in \mathbb{Z}$ le asigna su doble menos uno y este es único.

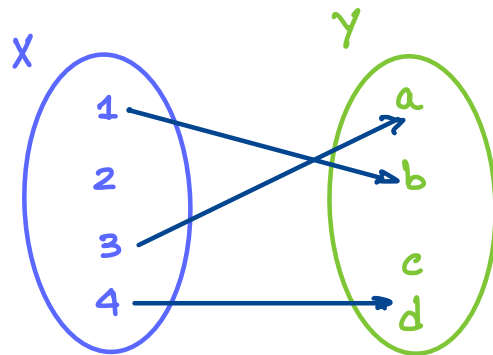
DOMINIO E IMAGEN

Df (Dominio) Dada una función, $f: X \rightarrow Y$, el dominio de f es el subconj. de X cuyos elem's están relacionados con algún elem de Y . (Podría ser que algunos elem's de X no estén asignados). Formalmente:

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) = y \text{ para algún } y \in Y\}.$$

Dominio de f

Ej



$$\text{dom } f = \{1, 3, 4\} \subseteq X$$

Ej Calcular el dominio:

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = n+1.$

"¿Para qué elementos de $\mathbb{N}$ podemos calcular $n+1$?"

¡Para todos! $\Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{N}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{1}{x^2-4}$

"¿Para qué elementos de $\mathbb{R}$ podemos calcular $\frac{1}{x^2-4}$?"

El denominador no se puede anular. Hay que quitar los elem's que hagan $x^2-4=0$

$$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4} \rightarrow x=\pm 2.$$

$$\Rightarrow \text{dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

"¿Para qué elementos de $\mathbb{R}$ podemos calcular $\sqrt{x^2 - x - 2}$?"

El radicando no puede ser negativo. Hay que calcular los elem's que cumplen $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Resolviendo la inequación, obtenemos $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

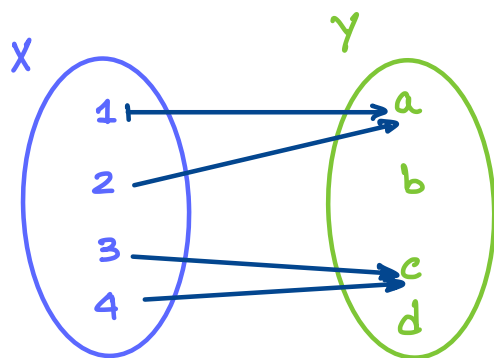
$$\Rightarrow \text{dom } h = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty).$$

Def (Imagen o recorrido) Definimos la imagen de una función $f: X \rightarrow Y$ como el subconjunto de Y cuyos elem's están asociados a alguno de X . Formalmente,

$$\underbrace{\text{im } f}_{\text{Imagen de } f} = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ con } f(x) = y \}$$

! Calcular la imagen suele ser más difícil que el dominio.

Ej



$$\text{im } f = \{ a, c \}$$

Ej Calcular la imagen de:

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = n + 1$

"¿Qué valores de $\mathbb{N}$ obtenemos al calcular $n + 1$?"

La función nos devuelve, para cada n natural, su consecutivo: $0 \mapsto 1; 1 \mapsto 2; 2 \mapsto 3; \dots$

$$\Rightarrow \text{im } f = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \} = \mathbb{N} - \{ 0 \}.$$

b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; g(m) = m^2$.

"¿Qué valores de $\mathbb{Z}$ obtenemos al calcular m^2 ?"

Al hacer cuadrados de n° s enteros, obtenemos n° s no negativos, pero no obtenemos todos los enteros positivos.

Por ejemplo, no obtenemos 2 porque si lo obtuviéramos,

$$m^2 = 2 \rightarrow m = \pm\sqrt{2} \text{ pero } \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

¡Solo podemos usar m entero!

$$0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 4 \quad 3 \mapsto 9 \dots$$

Conjunto de cuadrados perfectos.

$$\Rightarrow \text{im } g = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = x^2$

"¿Qué valores de $\mathbb{R}$ obtenemos al calcular x^2 ?"

Ahora tomemos $x \in \mathbb{R}$ y podemos obtener cualquier n° positivo al elevarlo al cuadrado, y también el 0. Por ej,

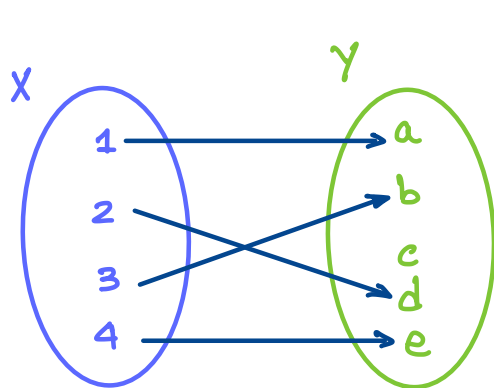
ahora sí podemos obtener 2, ya que $(\sqrt{2})^2 = 2$
 $\uparrow$ en $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{im } h = [0, +\infty)$$

Obs: Aunque la regla de asignación sea la misma, la función depende de los conjuntos de salida y de llegada... ¡y las cosas cambian!

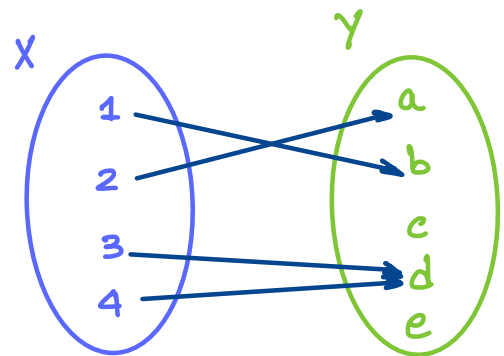
FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Idea: Una función es inyectiva si no hay "colisiones" en el conjunto de llegada.



No hay colisiones en Y

INYECTIVA



Hay colisiones en Y

$$f(3) = d = f(4)$$

NO INYECTIVA.

Df (Función inyectiva) Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es inyectiva si elementos distintos de X están asociados a elementos distintos de Y . O, de otro modo:

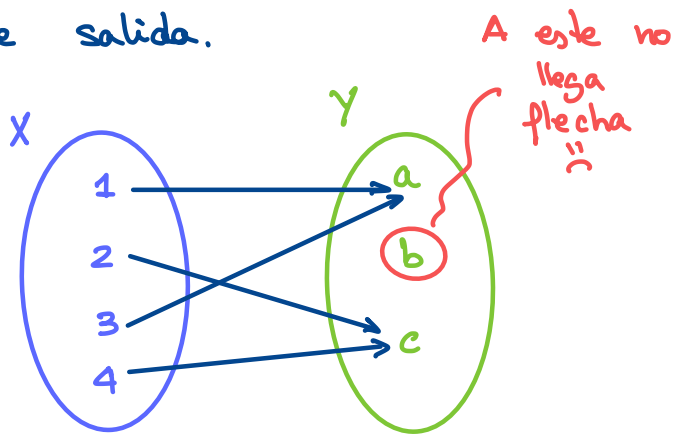
⊕

$$x_1, x_2 \in X \text{ con } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

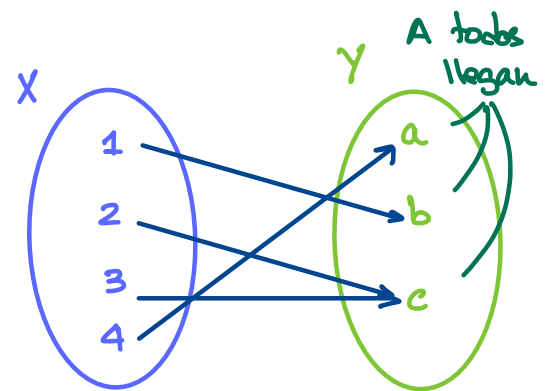
Para que sea inyectiva, si x_1 y x_2 tienen la misma imagen, son el mismo elemento de X en realidad.

⊗ Se usa para demostrar que una función es inyectiva.

Idea: Una función es sobreyectiva si todos los elem. del conj. de llegada están asociados a alguno del conj. de salida.



NO SOBREYECTIVA

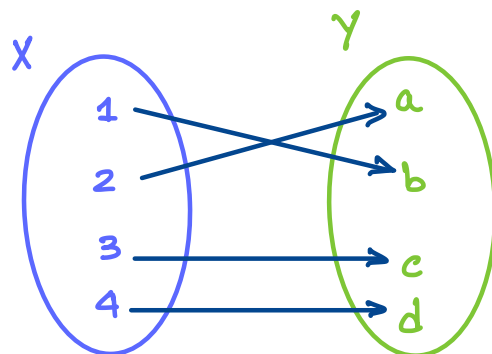


SOBREYECTIVA

! Como la imagen de una función son los elem's del conj. de llegada asociados a algún elem del conj. de salida, que una función sea sobreyectiva significa que la imagen debe ser todo el conj. de llegada.

Df (Función sobreyectiva o suprayectiva o sobre) Una función $f: X \rightarrow Y$ es sobreyectiva si $\text{im } f = Y$.

Df (Función biyectiva) Una función $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.



Inyectiva ✓

No hay colisiones en Y

Sobreyectiva ✓

Llegan flechas a todo Y

$\Rightarrow$ Byectiva ✓

Ej Consideramos $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(m,n) = 3m + 2n$$

- ¿Es inyectiva?

$$f(0,0) = 0 \quad \text{El } (0,0) \text{ y el } (-2,3) \text{ tienen la misma}$$

$$f(-2,3) = 0 \quad \text{imagen (COLISIÓN EN } \mathbb{Z} \text{)}$$

$\Rightarrow f$ no es inyectiva.

- ¿Es sobreyectiva?

$\hookrightarrow$ Si tomamos cualquier n en $\mathbb{Z}$, ¿podemos encontrar $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(m,n)$ sea el n que hemos elegido?

- Tomamos $1 \in \mathbb{Z}$ y buscamos $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

$$f(m,n) = 1 \iff 3m + 2n = 1 \iff m=1, n=-1$$

¿Podemos conseguir el 1 como $\overset{(*)}{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1}$!

- Tomamos $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ y usamos $(*)$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) &= 1 & \xrightarrow{\cdot k} & 3 \cdot k \cdot 1 + 2 \cdot k \cdot (-1) = 1 \cdot k \\ \text{Aquí queremos } \underline{k} & & \rightarrow & 3 \cdot k + 2 \cdot (-k) = k \\ & & \rightarrow & f(k, -k) = k \end{aligned}$$

¿Podemos conseguir cualquier $k \in \mathbb{Z}$!

$\Rightarrow \text{im } f = \mathbb{Z} \Rightarrow f$ sobreyectiva.

Ej Decidir qué funciones son inyectivas, sobreyectivas

o biyectivas:

a) $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; p(n) = n+2.$

• p inyectiva Usamos $\otimes$

Tomamos $n, m \in \mathbb{N}$

$$p(n) = p(m) \rightarrow n+2 = m+2 \rightarrow n = m \checkmark$$

p es inyectiva.

• p sobre

1 no es imagen de ningún n^o natural, si lo fuera:

$$p(n) = 1 \rightsquigarrow n+2 = 1 \rightsquigarrow \underline{n = -1}$$

$\nearrow$
No es natural

$\Rightarrow p$ no es sobre.

• p biyectiva No, porque no es sobre.

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(n) = 2n - 7$

• f iny

Tomamos $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(m) = f(n) &\rightarrow 2m - 7 = 2n - 7 \rightarrow 2m = 2n \\ &\rightarrow m = n \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ iny $\checkmark$

• f sobre

$f(n)$ sólo nos da n^os impares, así que la imagen no puede ser $\mathbb{Z} \rightarrow f$ no sobre

- f biy No, porque no es sobre.
-

c) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; f(x) = x^2 + 4x$

- f iny

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(-4) = 0 \end{array} \rightarrow f \text{ no es iny.}$$

- f sobre

¿Es -5 imagen de algún $x \in \mathbb{Q}$?

$$f(x) = -5 \rightarrow x^2 + 4x = -5 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \leftarrow \text{No es real} \rightsquigarrow x \notin \mathbb{Q}. \Rightarrow f \text{ no es sobre.}$$

- f biy No, porque no es iny ni sobre.
-

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x + 1$

- f iny

Tomamos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\rightarrow x_1 = x_2 \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ es iny.

- f sobre

Tomamos $y_0 \in \mathbb{R}$ un n° fijo, busquemos $x \in \mathbb{R}$
tal que $f(x) = y_0$.

$$f(x) = y_0 \rightarrow 2x + 1 = y_0 \rightarrow 2x = y_0 - 1$$

$$\rightarrow x = \frac{y_0 - 1}{2}$$

i Para $x = \frac{y_0 - 1}{2}$ se tiene que $f(x) = y_0$!

ii Y esto sirve para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$!

Por ejemplo, si elegimos $y_0 = 7 \rightsquigarrow x = \frac{7-1}{2} = 3$

Probamos:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$\Rightarrow \text{im } f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ es sobre.

• f biy Si

— Conclusiones —

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función

Para probar que f es inyectiva

Tomamos $x_1, x_2 \in X$, imponemos $f(x_1) = f(x_2)$ y

llegamos a $x_1 = x_2$.

Para probar que f no es inyectiva

Buscamos $x_1, x_2 \in X$ distintos, pero con $f(x_1) = f(x_2)$.

Para probar que f es sobreyectiva

Tomamos $y_0 \in Y$ arbitrario y buscamos $x \in X$ que cumpla que $f(x) = y_0$.

Para probar que f no es sobre

Buscamos algún $y_0 \in Y$, concreto (un n°) y vemos que $f(x) = y_0$ es imposible.

Para la biyectividad,

$$\text{INY} + \text{SOBRE} = \text{BIY}$$

IMAGEN Y PREIMAGEN DE UN SUBCONJUNTO

Ej. Consideramos esta función:

Sean los subconjuntos:

$$A_1, A_2 \subseteq X,$$

$$A_1 = \{1, 2\}; \quad A_2 = \{2, 3\}$$

$$B_1, B_2 \subseteq Y,$$

$$B_1 = \{b, c\}; \quad B_2 = \{c\}.$$

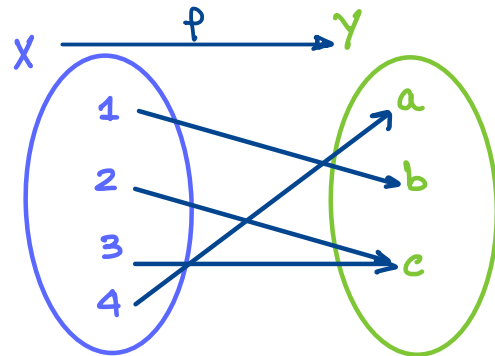


Imagen de

$$A_1 \text{ por } f \rightarrow f(A_1) = \{b, c\}$$

$$f(A_2) = \{c\}$$

Preimagen $\rightarrow f^{-1}(B_1) = \{1, 2, 3\}$
de B_1 por f

$$f^{-1}(B_2) = \{2, 3\}$$

Def (Imagen de un subconjunto) Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y

sea $A \subseteq X$. La imagen del subconjunto A por f es:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ con } f(a) = y\}$$

↑ Elementos de Y que están asociados

a algún elemento de A

Def (Preimagen de un subconjunto) Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y $B \subseteq Y$. La preimagen del subconjunto B es:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

↑ Elementos de X asociados a algún elemento de B

Obs:

- La imagen es un subconjunto del espacio de llegada y la preimagen, del de salida:

$$f(A) \subseteq Y \quad f^{-1}(B) \subseteq X$$

- $f(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

- f^{-1} no significa "función inversa" en este contexto, sino que es un subconjunto de X .

Subconjunto de X .
 $f^{-1}(B)$
 ↑ Subconj. de Y

Ej Consideramos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ y sean

$$A = (0, 1) \quad B = [1, 2]$$

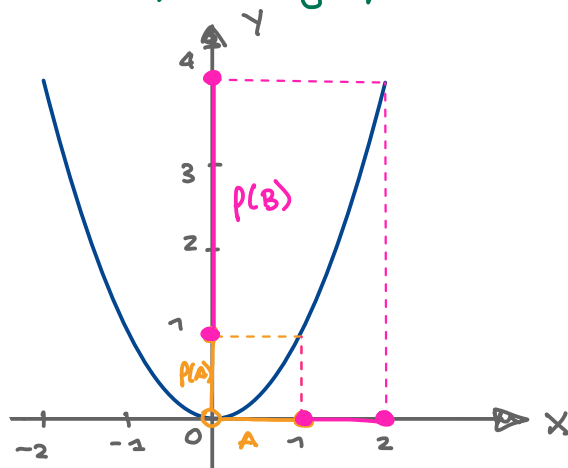
subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se proporciona, además, la gráfica de la función. Calcular:

a) $f(A)$ ← Vemos $A \subseteq X$

$$f(A) = (0, 1)$$

b) $f(B)$ ← Vemos $B \subseteq Y$

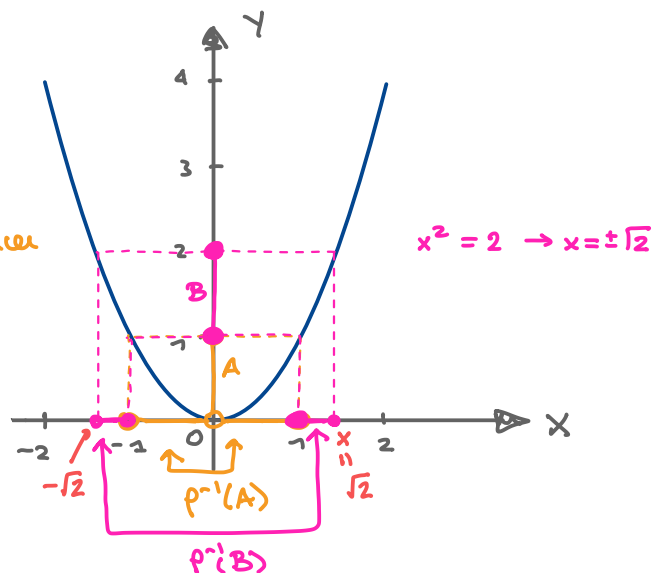
$$f(B) = [1, 4]$$



c) $p^{-1}(A)$ ↖emos $A \subseteq Y$

$$p^{-1}(A) = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Todos los elem's de $p^{-1}(A)$, al hacer su cuadrado, están en A



d) $p^{-1}(B)$ ↖emos $B \subseteq Y$

$$p^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

Ej. Definir una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R}$.

Describir $f^{-1}(\{2\pi\})$

Si la preimagen de $\{3\}$ es todo $\mathbb{R}$, eso significa que todos los puntos de X van al 3, es decir, f es constante:

$$f(x) = 3 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, por definición,

$$f^{-1}(\{2\pi\}) = \{x \in \mathbb{R} : \boxed{f(x) \in \{2\pi\}}\} = \emptyset.$$

Ej. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

a) Sean $A, B \subseteq X$.

• Probar que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

Tomamos $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B$ con $f(x) = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x \in A \text{ con } f(x) = y \\ \exists x \in B \text{ con } f(x) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases} \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B) \quad \checkmark$$

• Demostrar que $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

Tomamos $y \in f(A) \cup f(B)$ Ambos están en $A \cup B$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists a \in A \text{ con } f(a) = y \\ \exists b \in B \text{ con } f(b) = y \end{cases}$$

Puede ser a o b.

$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ con } p(x) = y \Rightarrow y \in p(A \cup B) \checkmark$$

b) Sean $Z, W \subseteq Y$ ($p: X \rightarrow Y$ función)

• Demostrar que $p^{-1}(Z \cap W) = p^{-1}(Z) \cap p^{-1}(W)$

Vamos a demostrar ambos contenidos a la vez.

$$x \in p^{-1}(Z \cap W) \Leftrightarrow p(x) \in Z \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \in Z \\ p(x) \in W \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in p^{-1}(Z) \\ x \in p^{-1}(W) \end{cases} \Leftrightarrow x \in p^{-1}(Z) \cap p^{-1}(W) \checkmark$$

— Propiedades —

Sea $p: X \rightarrow Y$ una función.

Para ver que $p(A) \cap p(B)$
no está contenido en $p(A \cap B)$
busca un contraejemplo

1) Si $A, B \subseteq X$,

$$p(A \cup B) = p(A) \cup p(B) \quad p(A \cap B) \not\subseteq p(A) \cap p(B)$$

2) Si $Z, W \subseteq Y$,

$$p^{-1}(Z \cup W) = p^{-1}(Z) \cup p^{-1}(W); \quad p^{-1}(Z \cap W) = p^{-1}(Z) \cap p^{-1}(W)$$

3) Si $T \subseteq Y$, $p(p^{-1}(T)) = p(X) \cap T$

⚠ En general no es cierto que $p(p^{-1}(T)) = T$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Ej Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \log_2 x \quad g(x) = x^2 - 1$$

Calcular:

a) $f+g$ ↓ Función suma
 $(f+g)(x) = \log_2 x + x^2 - 1$

b) $f-g$ ↓ Función diferencia
 $(f-g)(x) = \log_2 x - (x^2 - 1) = \log_2 x - x^2 + 1$

c) $f \cdot g$ ↓ Función producto
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1) \cdot \log_2 x$

d) f/g ↓ Función cociente.
 $(\frac{f}{g})(x) = \frac{\log_2 x}{x^2 - 1}$

Obs 1: Si las funciones son

$$f: \boxed{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$g: \boxed{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad g(m, n) = m^n$$

¿Tiene sentido $f+g$? ¡Son conjuntos completamente distintos!

¿Y si... $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2 + 1$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; \quad g(n) = n + 2 \quad ?$$

Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ podría ser $f(n) + g(n) = n^2 + 1 + n + 2$,
solo def. en $\mathbb{N}$.

Para evitar problemas:

Para hacer operaciones con funciones deben estar definidas en los mismos conjuntos de salida y de llegada

Obs 2: En el ejemplo anterior,

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_2 x \quad g(x) = x^2 - 1$$

$$\text{dom } f = (0, +\infty)$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R}$$

$$\bullet (f+g)(x) = \log_2 x + x^2 - 1 \quad \text{dom } (f+g) = (0, +\infty)$$

Restringe el dominio

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\log_2 x}{x^2 - 1}$$

Quitamos de dom f o dom g los elem's que anulan el denominador.
Como es un denominador, restringe aún

más: no se puede anular.

$$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hay que quitar 1 del dominio de f/g (-1 no está por no estar en dom f):

$$\text{dom } f/g = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Al hacer operaciones con funciones, se pueden modificar los dominios

Df (Operaciones con funciones) Sean $f, g: X \rightarrow Y$ funciones.

Definimos:

$$\bullet \text{ Suma: } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\bullet \text{ Diferencia: } (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\bullet \text{ Producto: } (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\bullet \text{ Cociente: } (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Todas definidas en
 $X \rightarrow Y$

— Dominios de las operaciones con funciones —

- Dominio de $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$

La única condición para hacer las operaciones es que ambas funciones estén definidas. Los dominios de las tres son:

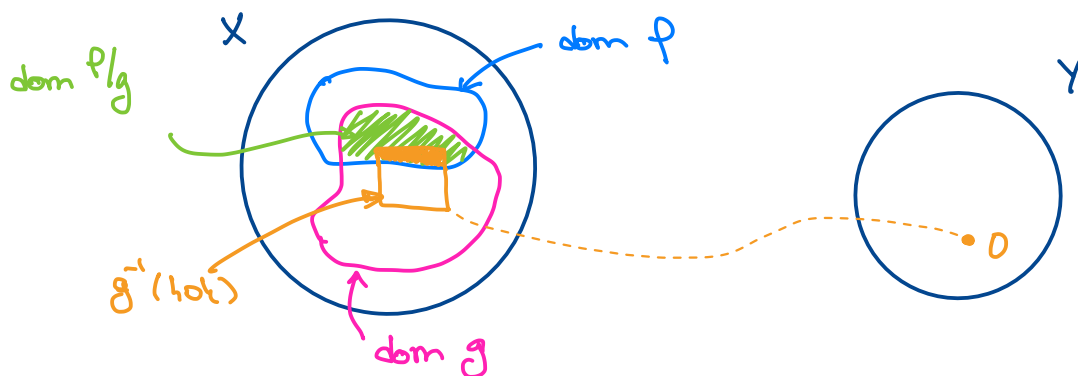
$$\text{dom } f \cap \text{dom } g$$

- Dominio de f/g

Además de existir ambas, el denominador no debe ser 0, esto es, hay que excluir los elementos del conjunto:

$$\{x \in X : g(x) = 0\} = \{x \in X : g(x) \in \{0\}\} = g^{-1}(\{0\})$$

Elementos de X que van al $\{0\}$ por g Def. de preimagen.



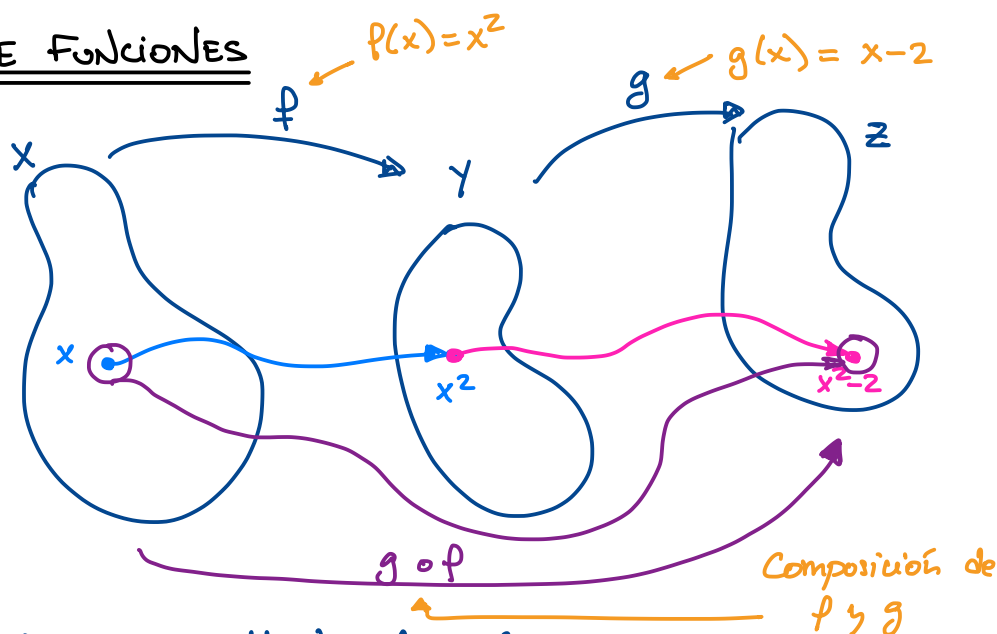
¿Dónde está definida f/g ?

$$\text{dom } f/g = (\text{dom } f \cap \text{dom } g) - g^{-1}(\{0\})$$

! En la práctica no es necesario calcular estos conjuntos siempre!
Como en el ejemplo de la Obs 3.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Idea



Aplicamos f y, al resultado, le aplicamos g

Df (Composición de funciones) Sean $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow Z$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Notación: Para la composición de f con g escribimos

$$g \circ f$$

porque x se aplica por la derecha

$$(g \circ f)(x) \quad \begin{array}{l} \text{1º se aplica } f \\ \text{luego se aplica } g \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} f \\ g \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \\ g \end{array} \text{ compuesto con } g$$

Ej Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x+1, \quad g(x) = \log_2 x$$

Calcular:

a) $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \log_2 (x+1)$$

b) $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x) = \log_2 x + 1$$

Obs: En general $g \circ f \neq f \circ g$

c) Hallar $\text{dom}(g \circ f)$

$$(g \circ f)(x) = \log_2(x+1)$$

$$\text{Condición: } x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow \text{dom}(g \circ f) = (-1, +\infty)$$

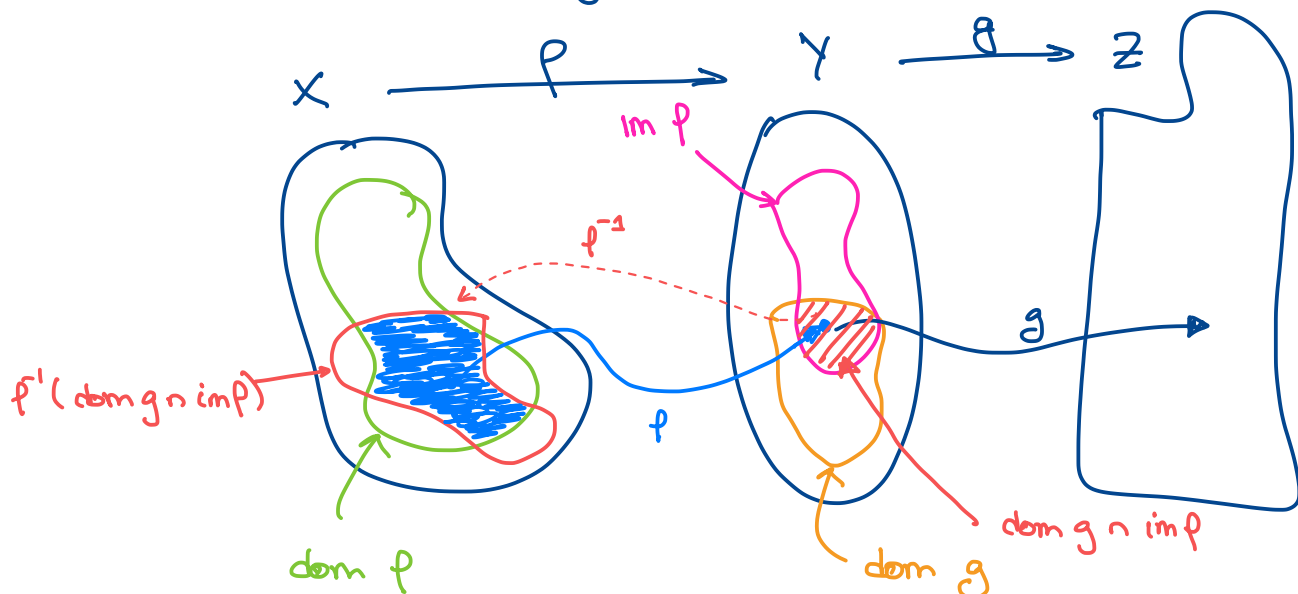
¿Qué relación hay?

Obs: En el ejemplo,

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{dom } g = (0, +\infty)$$

— Dominio de $g \circ f$ —

$$\text{Sean } f: X \rightarrow Y; \quad g: Y \rightarrow Z$$



Para poder hacer la composición, $g(f(x))$ debe estar en $\text{dom } g$

$$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f \cap f^{-1}(\text{dom } g \cap \text{im } f)$$

— Propiedades de la composición —

Sean $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ funciones.

- 1) f, g iny $\Rightarrow g \circ f$ iny
- 2) f, g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre
- 3) f, g biy $\Rightarrow g \circ f$ biy.

f inyectiva si

DEM

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- 1) Sean f, g iny

Tomamos $x_1, x_2 \in X$, ya que $g \circ f: X \rightarrow Z$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$g \text{ iny} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$f \text{ iny} \Rightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

- 2) Sean f, g sobre:

f sobre si para $y \in Y$, $\exists x \in X$ con

$$f(x) = y.$$

Tomamos $z \in Z$, ya que $g \circ f: X \rightarrow Z$

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

$$g \text{ sobre } y \ z \in Z \Rightarrow \exists y \in Y \text{ con } g(y) = z$$

$$f \text{ sobre } y \ y \in Y \Rightarrow \exists x \in X \text{ con } \boxed{f(x) = y}$$

$$\Rightarrow \exists x \in X \text{ con } g(f(x)) = z$$

$$\Rightarrow g \circ f \text{ es sobre } \checkmark$$

- 3) Sean f, g biy

$$\text{Biy} = \text{Iny} + \text{sobre}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow f, g \text{ iny} \xRightarrow{1)} g \circ f \text{ iny} \\ \Rightarrow f, g \text{ sobre} \xRightarrow{2)} g \circ f \text{ sobre} \end{array} \Rightarrow g \circ f \text{ biyectiva } \checkmark$$



Ej Sean $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ funciones. Probar que $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.

Como $g \circ f$ iny, para $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Veamos que $f: X \rightarrow Y$ es inyectiva.

Tomamos $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Como son el mismo elem, al

aplicar g a ambos, debemos

obtener lo mismo

f iny ✓

Función INVERSA

Def (Función identidad) La función identidad en un conjunto

X es:

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

Asigna a cada elem.

a sí mismo.

Def (Función inversa) Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Decimos que

otra función $g: Y \rightarrow X$ es inversa de f si:

$$\underline{g \circ f = \text{id}_X}$$

$$X \rightarrow X$$

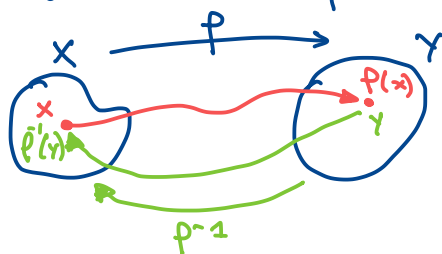
$$\underline{f \circ g = \text{id}_Y}$$

$$Y \rightarrow Y$$

Si una función tiene inversa, decimos que es invertible.

Notación: A la inversa de f se la denota por $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

Nota



¡No confundir con preimagen!

¡Esto es una función!

Ej. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x - 1$. Comprobar que $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{x+1}{2}$ es la inversa de f .

• $g \circ f$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x \checkmark$

• $f \circ g$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 1 = x+1-1 = x \checkmark$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Proposición Dada $f: X \rightarrow Y$ invertible $\Rightarrow$ Tiene inversa única.

DEM: Sup. que $f_1, f_2: Y \rightarrow X$ son dos inversas distintas de f .

$\uparrow$
¡Deben ser iguales!

$$(f_1 \circ f)(x) = x = (f_2 \circ f)(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_1(f(x))}_{\text{Es el mismo elemento de } X} = x = \underbrace{f_2(f(x))}_{\text{Es el mismo elemento de } X} \text{ para todo } x \in X$$

$\Rightarrow f_1$ y f_2 nos dan lo mismo para los mismos elem's de Y

$$\Rightarrow f_1 = f_2 \quad \text{¡Contradicción!} \quad \blacksquare$$

Prop. (Caracterización de una función invertible)

$$f: X \rightarrow Y \text{ invertible} \Leftrightarrow f \text{ biyectiva.}$$

DEM

$\Rightarrow$ Sup. que $f: X \rightarrow Y$ es invertible con inversa f^{-1} .

• f inyectiva.

Tomamos $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$$

$$\underbrace{f^{-1}}_{\text{inversa de } f} \Rightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

- f sobre

Tomamos $y_0 \in Y$ fijo. ¿ $\exists x \in X$ con $f(x) = y_0$?

$$f(x) = y_0 \iff f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y_0) \iff x = \underline{f^{-1}(y_0)} \checkmark$$

Sabemos que existe

porque f^{-1} es la inversa de f .

$\Rightarrow f$ biyectiva $\checkmark$

⌊ Sup. que f es biyectiva. Hay que definir $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

Tomamos $y_0 \in Y$. Como f es sobre, $\exists x_0 \in X$ con $\underline{f(x_0) = y_0}$

Definimos entonces

$$f^{-1}(y_0) = x_0, \text{ donde } x_0 \in X \text{ es el que cumple}$$

¿Está así f^{-1} bien definida?

⌊ Un mismo $y_0 \in Y$ no tiene asociado más de un $x_0 \in X$.

Reducción al absurdo

Supongamos que sí: existen $x_1, x_2 \in X$ con $\underline{x_1 \neq x_2}$ y

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(y_0) = x_1 \xrightarrow{\text{Def. de } f^{-1}} y_0 = f(x_1) \\ f^{-1}(y_0) = x_2 \xrightarrow{\quad \quad \quad} y_0 = f(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$f \text{ iny.} \Rightarrow \underline{x_1 = x_2}$$

¡Contradicción!

$\rightarrow f^{-1}$ está bien definida.

¿Es f^{-1} la inversa de f ?

- $f^{-1} \circ f$

$$x_0 \in X. \quad \underline{f(x_0) = y_0} \xrightarrow{\text{Def. de } f^{-1}} \underline{f^{-1}(y_0) = x_0} \rightsquigarrow \underline{f^{-1}(f(x_0)) = x_0} \checkmark$$

- $f \circ f^{-1}$

$$y_0 \in Y \quad \underline{f^{-1}(y_0) = x_0} \xrightarrow{\text{Def. de } f} \underline{f(x_0) = y_0} \rightsquigarrow \underline{f(f^{-1}(y_0)) = y_0} \checkmark$$

$\Rightarrow f^{-1}$ es la inversa de f $\square$

FUNCIÓN INVERSA: EJEMPLOS

Objetivos:

- 1- cómo se calcula la función inversa?
- 2- Si una función no es invertible, ¿se puede "arreglar"?

Ej Decidir si son invertibles y hallar las inversas:



f invertible $\Leftrightarrow f$ biyectiva

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 3x + 1$

• ¿ f invertible?

- f inyectiva: Tomamos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ \Rightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

- f sobre: Tomamos $y_0 \in \mathbb{R}$ ¿ $\exists x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y_0$?

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow 3x + 1 = y_0 \Leftrightarrow x = \frac{y_0 - 1}{3} \checkmark$$

$\Rightarrow f$ biyectiva $\Rightarrow f$ invertible

• ¿ f^{-1} ? Buscamos $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f^{-1} \circ f = \text{id}$ $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

IDEA. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 3x + 1 = y$$

Si nos dan y , ¿cómo recuperamos el x del que viene?

$$y = 3x + 1 \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow \frac{y - 1}{3} = x$$

Queremos este x ... ¡Lo despejamos!

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$$

Es fácil comprobar que $f^{-1} \circ f = \text{id}$ y $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3 - 3x$

• ¿f invertible?

¡f no es inyectiva!

$$x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{f(0)} = 0^3 - 3 \cdot 0 = \underline{0}$$

$$\rightarrow \underline{f(\sqrt{3})} = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \underline{0}$$

⇒ f no es invertible.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = e^x$

• ¿f invertible?

- f iny: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \underbrace{e^{x_1}} = \underbrace{e^{x_2}} \Rightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

- f sobre:

Si tomamos $y = 0$, $\nexists x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$

$$\underbrace{e^x}_{\oplus} = 0 \quad \times$$

⇒ f no es sobre ⇒ f no es invertible

obs: $f(x) = e^x$ toma valores estrictamente positivos,
esto es $\text{Im } f = (0, +\infty)$

! Podemos modificar el conj. de llegada para hacer la función sobreyectiva!

Definimos $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \overbrace{(0, +\infty)}^{\text{Im } f}; \tilde{f}(x) = e^x$

• $\tilde{f}$ iny por serlo f.

• $\tilde{f}$ sobre porque $\text{Im } \tilde{f} = \text{Im } f = (0, +\infty)$

⇒ $\tilde{f}$ biy
⇒ $\tilde{f}$ invert.

Manipulación vil !!

- ¿ $\tilde{p}^{-1}$? ¡Como antes! Tomamos $y \in (0, +\infty)$

$$\tilde{p}(x) = y \Rightarrow e^x = y \Rightarrow x = \ln y$$

La inversa de $\tilde{p}$ es

$$\tilde{p}^{-1}: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \tilde{p}^{-1}(x) = \ln x$$

🚧 "Manipulando" el conj. de llegada podemos conseguir funciones sobreyectivas, y puede que invertibles.

Si $p: X \rightarrow Y$ es una función, entonces

$$\tilde{p}: X \rightarrow \text{Im } p; \tilde{p}(x) = p(x)$$

es sobreyectiva

↑ DEM: Basta ver que $\text{Im } \tilde{p} = \text{Im } p$.

d) $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; p(n) = n+2$

- ¿ p invertible?

- p iny: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

$$p(n_1) = p(n_2) \Rightarrow n_1 + 2 = n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2 \quad \checkmark$$

- p sobre: Tomamos $y_0 \in \mathbb{Z}$. ¿ $\exists n \in \mathbb{Z}$ con $p(n) = y_0$?

$$p(n) = y_0 \Rightarrow n + 2 = y_0 \Rightarrow n = y_0 - 2 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow p \text{ biy} \Rightarrow p \text{ inv.}$$

- ¿ $\tilde{p}^{-1}$?

Tomamos $y_0 \in \mathbb{Z}$

$$p(n) = y_0 \rightarrow n + 2 = y_0 \rightarrow n = y_0 - 2$$

Su inversa es $\tilde{p}^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \tilde{p}^{-1}(n) = n - 2$

e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) = n+2$

• ¿ f inv? $\uparrow$ mínimo es $n=0 \rightsquigarrow f(n)$ mín es 2

- f iny: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 2 = n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2 \checkmark$$

- f sobre ¡No! Si tomamos $y_0 = 1$,

$$f(n) = 1 \rightarrow n + 2 = 1 \rightarrow n = 1 - 2 \rightarrow \boxed{n = -1 \notin \mathbb{N}}$$

Lo podemos "arreglar", ya que $\text{Im } f = \{2, 3, 4, \dots\}$. Definimos

$$\tilde{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

¿ $\tilde{f}$ es sobre seguro!

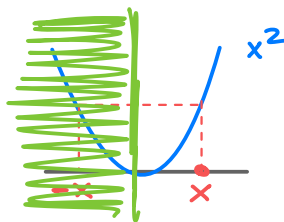
• ¿ $\tilde{f}^{-1}$? Dado $y_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$,

$$f(n) = y_0 \Rightarrow n + 2 = y_0 \Rightarrow n = y_0 - 2 \in \mathbb{N}$$

La inversa es $\tilde{f}^{-1}: \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}; \tilde{f}^{-1}(n) = n - 2$

⚠⚠ En realidad f no es invertible. "Arreglarlo" es considerar otra función $\tilde{f}$ que sí lo es, pero f no lo será nunca.

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$



f no es iny, ni sobre $\Rightarrow f$ no es invertible.

No es iny porque $f(x) = f(-x)$. Para "arreglar" esto, hay que modificar el cod. de salida:

$$\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; \tilde{f}(x) = x^2$$

- $\tilde{f}$ sí es inyectiva: $x_1, x_2 \in \underline{[0, +\infty)}$

$$\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{x_2^2} = x_2$$

- $\tilde{f}$ no es sobre porque $\tilde{f}(x) = x^2$ nunca es negativo.

$$\text{Im } \tilde{f} = [0, +\infty)$$

Podemos volver a "arreglarlo":

$$\tilde{\tilde{f}}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty); \quad \tilde{\tilde{f}}(x) = x^2$$

Así, $\tilde{\tilde{f}}$ es biy y, por tanto, invertible. Su inversa es

$$\tilde{\tilde{f}}^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty); \quad \tilde{\tilde{f}}^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Conclusión: La invertibilidad de una función no depende solo de su expresión, sino de los conjuntos entre los que está definida