

CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

Def (Conjunto) Un conjunto es una colección de elementos.

Ej Son conjuntos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad F = \{\cos x, \sin x\} \quad C = \{\text{rojo, verde, azul}\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > \pi^2\}$$

Conjunto vacío ($\emptyset$) No tiene ningún elemento.

Formas de definir un conjunto:

- Lenguaje natural

$$P = \text{"Enteros no negativos pares"}$$

- Dando los elementos:

$$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

- Descripción de las características de los elementos:

$$P = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0 \text{ y } m \text{ par}\}$$

$$P = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 0 \text{ y } m \text{ par}\}$$

En un conjunto hay una relación de pertenencia, que indica si un elemento está en la colección o no.

Ej Para $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$ se tiene que

$$10 \in A$$

└ "Pertenece"

$$-5 \notin A$$

└ "No pertenece."

SUBCONJUNTOS

Def (Subconjunto) Sea A un conjunto. Decimos que B es un subconjunto de A si todos los elem's de B lo son también de A . Escribimos $B \subseteq A$

└ "Subconjunto de"
"Incluido en"
"Contenido en"

Obs: B podría ser todo A , es decir, A es subconjunto de sí mismo ($A \subseteq A$); y B también podría ser vacío ($\emptyset \subseteq A$). A estos subconjuntos se les llama subconj. triviales.

Si $B \subseteq A$ y no es un subconjunto trivial, se le llama subconjunto propio.

NOTACIÓN —

- Podemos usar el símbolo de inclusión en sentido opuesto:

$$A \supseteq B \quad \text{"A contiene a B"}$$

- Si queremos indicar que B es subconjunto de A , pero no es todo A escribimos

$$B \subsetneq A \quad \text{o} \quad A \supsetneq B$$

⚠ DIFERENCIA ENTRE PERTENENCIA ($\in$) Y CONTENIDO ($\subseteq$)

- $\in$ se refiere a la relación que hay entre un elemento y un conjunto.
- $\subseteq$ es la relación entre dos conjuntos, uno "dentro" del otro.

Problema: ¿Cuándo los elementos son conjuntos!

Ej: Sean

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

- $1 \in A$, pero $1 \notin B$
 - $\{1\} \subseteq A$, pero $\{1\} \notin B$ porque $\{1\}$ es un subconj. de A , pero no de B . Sin embargo, $\{1\} \in B$ porque es un elem. de B .
 - $\{1, 2\} \subseteq A$; $\{1, 2\} \in B$
 - $\{\{1\}\} \subseteq B$
 - $\emptyset \subseteq A$ y $\emptyset \subseteq B$.
-

— IGUALDAD DE CONJUNTOS —

Axioma de extensibilidad

Proposición que es cierta sin necesidad de demostración por su "simpleza"

Los conjuntos A y B son iguales, $A=B$, si, y solo si, tienen los mismos elementos:

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Obs: Para dem. que dos conj. son iguales hay que dem. que uno es subconj. del otro y viceversa:

$$A=B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

Ej: Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}$:

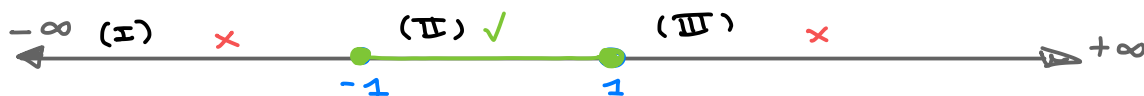
$$A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 1\} \quad \text{y} \quad B = [-1, 1].$$

Dem. que $A=B$.

- $(A \subseteq B)$ Tomamos $x \in A$ y vemos que $x \in B$.

$x \in A \rightarrow x^2 \leq 1$. Resolviendo esta inequación,

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



(I) $x = -2 \rightarrow (-2)^2 \leq 1 \rightarrow 4 \leq 1$ ✗

(II) $x = 0 \rightarrow 0^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1$ ✓

(III) $x = 2 \rightarrow 2^2 \leq 1 \rightarrow 4 \leq 1$ ✗

$$x \in A \Rightarrow x \in [-1, 1] = B \quad \checkmark$$

- $(B \subseteq A)$ Tomamos $x \in B$ y vemos que está en A .

$$x \in B \Rightarrow x \in [-1, 1].$$

Caso 1: Si $x = 1$ o $x = -1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x \in A$ ✓

Caso 2: Si $-1 < x < 1$ al elevarlo al cuadrado obtenemos un n^o positivo menor que x o 0 , esto es,

$$0 \leq x^2 < 1 \rightarrow x \in A. \checkmark$$

$$\Rightarrow x \in A$$

Concluimos que $A = B$.

— PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN —

Sean A, B, C conjuntos.

(i) Reflexividad. $A \subseteq A$.

(ii) Antisimétrica. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

(iii) Transitiva. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

(iv) Inclusión vacía. $\emptyset \subseteq A$.

$\subseteq$ ES
UNA
RELACIÓN
DE
ORDEN
p.

PARTES DE UN CONJUNTO

Def (Partes de un conjunto o conjunto potencia)

Sea A un conjunto. Definimos las partes de A , $P(A)$, como el conjunto cuyos elem's son los subconjuntos de A .

Ej Dado $A = \{1, 2, 3\}$, hallar $P(A)$.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Ej Calcular $P(\emptyset)$

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Ej Para $A = \{1, 2\}$ ^{2 elem's}, hallar $P(P(A))$.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\} \leftarrow 4 = 2^2 \text{ elem's}$$

$$P(P(A)) = \{\emptyset,$$

[↑]
 $16 = 2^4 \text{ elem's...}$

$$\{ \emptyset \}, \{ \{1\} \}, \{ \{2\} \}, \{ A \},$$

$$\{ \emptyset, \{1\} \}, \{ \emptyset, \{2\} \}, \{ \emptyset, A \}, \{ \{1\}, \{2\} \}, \{ \{1\}, A \}$$

$$\{ \{2\}, A \},$$

$$\{ \emptyset, \{1\}, \{2\} \}, \{ \emptyset, \{1\}, A \}, \{ \emptyset, \{2\}, A \}, \{ \{1\}, \{2\}, A \},$$

$$P(A) \}.$$

Conjetura: Si A tiene n elem's $\Rightarrow P(A)$ tiene 2^n elem's.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

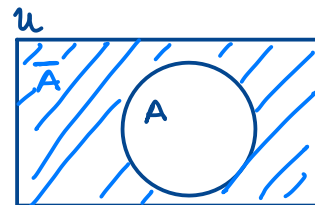
Sean A, B dos conjuntos contenidos en un conjunto U .

- COMPLEMENTARIO

$$\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}$$

Elementos que están en U , pero no en A .

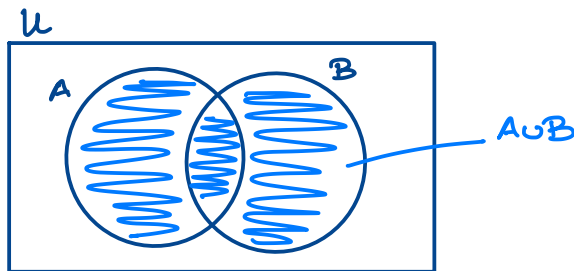
Otras notaciones: A^c o A'



- UNIÓN

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

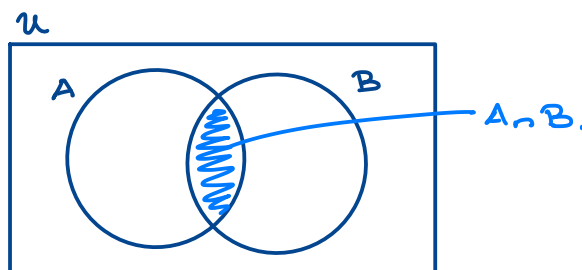
Son los elementos que están en A o en B (o en ambos)



- INTERSECCIÓN

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

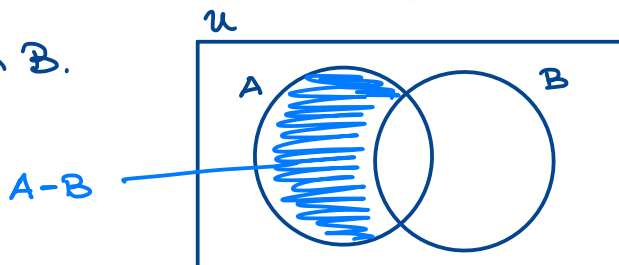
Son los elementos que comparten A y B .



- DIFERENCIA

$$A - B = \{x \in U : x \in A, \text{ pero } x \notin B\}$$

Son los elementos de A , quitando los que tiene en común con B .



Obs: También se escribe $A \setminus B$.

Ej. En $U = \{a, b, c, d, e\}$ consideramos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad B = \{c, d, e\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A \cap B = \{c\}$$

$$\overline{A} = \{d, e\}$$

$$A - B = \{a, b\}$$

Ej. Consideramos

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\};$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 9\}; \quad V = \{2, 4, 6, 8\}$$

como subconj. de $\mathbb{N}$. Calcular:

$$a) \quad S \cap U = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$b) \quad (S \cap T) \cup U = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$$

$$S \cap T = \{3, 4, 5\}$$

$$c) \quad (S \cup U) \cap V = \{2, 4\}.$$

$$S \cup U = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$$

$$d) \quad (S \cup V) - U = \{5, 6, 8\}.$$

$$S \cup V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$e) \quad (S \cup V) - (T \cap U) = \{1, 2, 5, 6, 8\}.$$

$$T \cap U = \{3, 4, 9\}$$

Def (Conjuntos disjuntos) Decimos que A, B son disjuntos si

$$A \cap B = \emptyset$$

Ej. En $\mathbb{N}$, $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ (Pares)

$B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ (Impares)

A y B son disjuntos porque $A \cap B = \emptyset$.

- Propiedades de las operaciones con conjuntos —

Sean $A, B, C \subseteq U$.

• Unión

$$\bullet A \cup B = B \cup A$$

$$\bullet (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\bullet A \cup \emptyset = A$$

$$\bullet A \cup U = U$$

$$\bullet A \cup A = A$$

$$\bullet A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \bullet A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

• Intersección

$$\bullet A \cap B = B \cap A$$

$$\bullet (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\bullet A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bullet A \cap U = A$$

$$\bullet A \cap A = A$$

• Diferencia

$$\bullet A - B = A \cap \overline{B}$$

$$\bullet A - \emptyset = A$$

$$\bullet A - U = \emptyset$$

$$\bullet A - A = \emptyset$$

• Complementario

$$\bullet \overline{\overline{A}} = A$$

$$\bullet \overline{\emptyset} = U$$

$$\bullet \overline{U} = \emptyset$$

$$\bullet \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\bullet \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Leyes de
De Morgan

DEM

$$\bullet A - B = A \cap \overline{B}$$

$$x \in A - B \iff \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \iff \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \iff x \in A \cap \overline{B}$$



PRODUCTO CARTESIANO

Df (Producto cartesiano) Sean A y B dos conjuntos, con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Definimos su producto cartesiano como el conjunto en el que los elementos son pares ordenados:

$$\underline{A \times B} = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad ! \text{ El orden es importante}$$

Producto
cartesiano

Si lo que tenemos son n conjuntos no vacíos, $A_1, \dots, A_n$, se define igual su producto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n \text{ "coordenadas"}}) : \underbrace{a_i \in A_i}_{\text{"Productorio"}}\}$$

Notación: Una forma abreviada de escribir el producto cartesiano anterior es

$$A_1 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Obs: El producto cartesiano podría tener infinitos "factores".

Ej: Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ subconjuntos de $\mathbb{N}$. Hallar $S \times T$.

Pares $(\quad, \quad)$ en S en T Están todas las combinaciones.

$$S \times T = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 7), (1, 8), (1, 9), \\ (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 7), (2, 8), (2, 9), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (3, 9), \\ (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 7), (4, 8), (4, 9), \\ (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 7), (5, 8), (5, 9)\}$$

Obs: Importa el orden.

$(3,4)$ y $(4,3)$ son elem's distintos en $S \times T$.

Ej: Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $T = \{3, 4, 5, 7, 8\}$;

$U = \{1, 2, 9\}$; $V = \{2, 4\}$.

subconjuntos de $\mathbb{N}$. Calcular:

a) $S \times V = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4), (5,2), (5,4)\}$

b) $T \times U = \{(3,1), (3,2), (3,9), (4,1), (4,2), (4,9), (5,1), (5,2), (5,9), (7,1), (7,2), (7,9), (8,1), (8,2), (8,9)\}$.

c) $(S \times V) - (T \times U) = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4)\}$.

d) $(S - T) \times (V - U) = \{(1,4), (2,4)\}$

$$S - T = \{1, 2\} \quad V - U = \{4\}$$

$(S \times V) - (T \times U) \neq (S - T) \times (V - U)$

Ej: Sean

$$A = \{-1, 0, 1\}; \quad B = \{0, 1, 2\}; \quad C = \{-2, 2\}.$$

Calcular:

a) $(A \cup B) \times C$

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$(A \cup B) \times C = \{(-1, -2), (-1, 2), (0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -2), (2, 2)\}.$$

$$b) (A \times C) \cup (B \times C).$$

$$A \times C = \{(-1, -2), (-1, 2), (0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2)\}$$

$$B \times C = \{(0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -2), (2, 2)\}$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(-1, -2), (-1, 2), (0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -2), (2, 2)\}.$$

Es como una distributiva.

$$\rightarrow (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

¿Será cierto en general?

— Propiedades del producto cartesiano —

Sean A, B, C conjuntos no vacíos.

$$1. A \times B \neq B \times A \text{ en general.}$$

$$2. \text{ Si } X \subseteq A \text{ e } Y \subseteq B \text{ no vacíos,} \\ X \times Y \subseteq A \times B.$$

3. Distributivas con la unión y la intersección:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

DEM:

$$1) A \times B \neq B \times A$$

Baste tomar $A = \{1\}$; $B = \{-1\}$ en $\mathbb{N}$:

$$A \times B = \{(1, -1)\} \quad \text{y} \quad B \times A = \{(-1, 1)\}.$$

$\neq$

$$2) \quad X \subseteq A, Y \subseteq B \Rightarrow X \times Y \subseteq A \times B.$$

Tomamos $(x, y) \in X \times Y$

$$\rightarrow \begin{cases} x \in X \subseteq A \\ y \in Y \subseteq B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \rightarrow (x, y) \in A \times B. \checkmark$$

$$3) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\boxed{\subseteq}$ Tomamos $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$$\rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \cap C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \\ y \in C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ (x, y) \in A \times C \end{cases} \rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \checkmark$$

$\boxed{\supseteq}$ Tomamos $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\rightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ (x, y) \in A \times C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \\ y \in C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in B \cap C \end{cases}$$

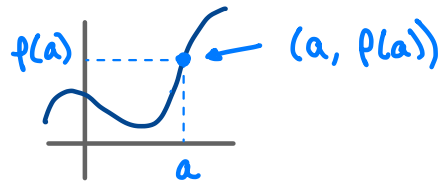
$$\rightarrow (x, y) \in A \times (B \cap C) \checkmark$$



CONTEXTOS EN LOS QUE APARECE EL PRODUCTO CARTESIANO

- Funciones

- Definición
- Gráfica



- Relaciones binarias y operaciones.

- Suma de n°s reales

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

- Geometría y Álgebra lineal.

- Espacios: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Plano)

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ (Espacio)}$$

- Puntos: $P(3, -1, 2) \leftarrow$ Punto P en $\mathbb{R}^3$

- Vectores: $\vec{v} = (-8, 0, 0, 1) \leftarrow$ Vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^4$

- Probabilidad

- Resultados de experimentos aleatorios compuestos:

"lanzar una moneda y un dado"

$$\{C, x\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightsquigarrow (x, 2)$$

