Lógica elemental

1. Dado el siguiente enunciado: *"La suma de dos números impares es un número par."*
   a) Identificar la hipótesis y la tesis.
   b) Demostrarlo.
2. Identificar la hipótesis (o las hipótesis) y la tesis de las siguientes proposiciones:
   a) Un número es divisible por 10 si es divisible por 2 y por 5 a la vez.
   b) Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus ángulos son iguales a 60 grados.
   c) El cuadrado de cualquier número real es positivo.
   d) Si p y q son números primos y $p+q$ es par, entonces ambos números deben ser iguales a 2.
3. Escribir una conjetura y dar un contraejemplo que muestre que nuestra conjetura es falsa. Por ejemplo,
   - *Conjetura*: Todo número primo es impar.
   - *Contraejemplo*: La conjetura es falsa porque 2 es un número primo y es par.
4. Demostrar o dar un contraejemplo para los siguientes enunciados:
   a) La suma de dos números primos distintos siempre es impar.
   b) El cuadrado de un número entero siempre es positivo.
5. Demostrar las siguientes equivalencias lógicas:
   a) $P \Rightarrow Q \equiv \overline{P} \vee Q$.
   b) $P \iff Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
   c) $(P \vee \overline{Q}) \wedge Q \equiv Q$.
6. Demostrar la siguiente equivalencia utilizando las propiedades de los conectores lógicos:
$$\overline{P \vee (Q \wedge R)} \equiv \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$$
7. Consideramos la siguiente equivalencia:
$$(P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{R}) \equiv \overline{\overline{P} \vee Q} \wedge \overline{\overline{Q} \vee R}$$
   a) Demostrarla usando tablas de verdad.
   b) Demostrarla usando las propiedades de los conectores.

8. Dados los siguientes predicados, decidir su valor de verdad para los valores que se dan:

   a) $P(x) : x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ para $x = -1$ y para $x = 1$.

   b) $Q(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, (x \geq) \wedge (y \leq 0) \wedge (x^2 + y^2 = 1)$ para $\{x = 0, y = -1\}$ y para $\{x = 1, y = -1\}$.

9. Escribir los siguientes predicados en lenguaje natural y decidir si son cieros o falsos:

   a) $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n = 2k$

   b) $\forall m \in \mathbb{Z}\ \ (\neg(m < 0) \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{Z})$

   c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (\varepsilon > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon)$

10. Escribir predicados que describan los siguientes enunciados en lenguaje natural:

    a) Dado un número natural n cualquiera, siempre hay un número primo mayor que él.

    b) Entre dos números reales cualesquiera hay un numero racional, distinto de los dos primeros.

    c) El cuadrado de cualquier número real entre 0 y 1 es menor que el propio número.